

「モデリングとシミュレーション実験」課題 1

締切:2019/11/25

1 単振り子

1.1 運動方程式

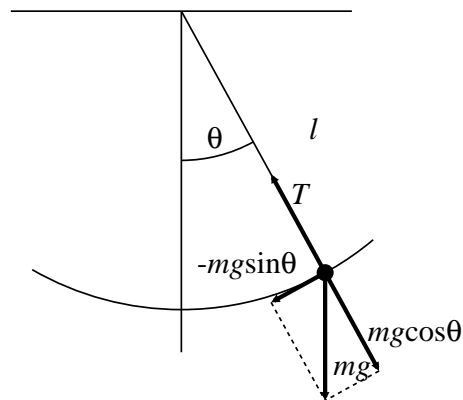


図 1 単振り子

単振り子は、天井から伸び縮みしない糸で質量 m の錘が釣り下がった形の振り子である (図 1)。糸の質量と太さ、錘の大きさ、空気による摩擦は無視することにする。通常の (x, y) 座標 (Cartesian と云う) ではなく、天井への固定点を原点し、動径方向 (原点から外向きの方向) と角度によって表す極座標 (r, θ) を用いると、運動方程式が簡単になる。動径方向と角度方向の力は、重力加速度 g と糸に発生する張力 T を用いて、以下のように表される。

$$F_r = mg \cos \theta - T \quad (1.1)$$

$$F_\theta = -mg \sin \theta \quad (1.2)$$

運動方程式は、以下のようになる。

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m} F_r \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{m} F_\theta \quad (1.4)$$

糸の長さが一定値 l に固定されていることから、角度方向の運動方程式は

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta \quad (1.5)$$

となる。動径方向の運動方程式からは、張力 T を定める式が得られる。

$$-l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g \cos \theta - \frac{T}{m} \quad (1.6)$$

課題 1 講義で使用した `HarmonicOscillator` クラスを参考に、`Pendulum` クラスを作成し、 θ の時間変化をシミュレーションし、結果を可視化しなさい。

2 エネルギー保存則

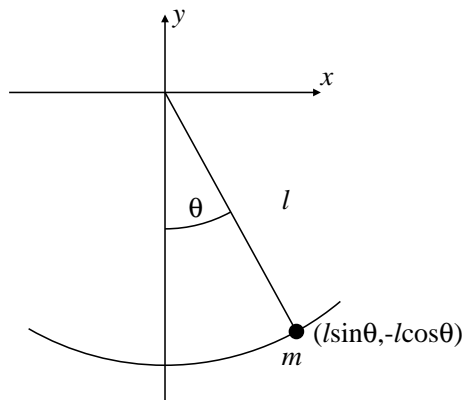


図 2 単振り子の位置座標

糸の長さを l とすると、錘の (x, y) 位置は $(l \sin \theta, -l \cos \theta)$ となる (図 2)。ここから、

運動エネルギー K 及び位置エネルギー V は以下のようになる。

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.1)$$

$$V = -mgl \cos \theta \quad (2.2)$$

課題 2 全エネルギー $E = K + V$ が保存すること、つまり

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

であることを示しなさい。糸の長さ l は一定であることに注意しなさい。

課題 3 シミュレーションによって、運動エネルギー K 、位置エネルギー V 、及び全エネルギー E の時間変化を図示しなさい。

課題 4 シミュレーションによって、角度 θ と角速度 $\dot{\theta}$ の変化を、 $(\theta, \dot{\theta})$ 空間内の軌跡として図示しなさい。

3 レポート提出

レポートは以下のように作成し、締切日の 12 時までに教務システムを通じてアップロードすること。

- 課題に沿って、内容を記載すること。ただし、単に課題の答えを記載するだけでなく、課題の記述・理解、方法なども課題に前後して記載することで、レポートそのもので問題設定から解決までが読み取れる形式とすること。
- 「考察」として、レポートを通じて得たことを記載すること。
- 正しい日本語または英語で記述すること。Word や L^AT_EX などを使って、適切に組版すること。必要なプログラム、スクリプト、図も入れ込むこと。単なるテキストファイルの PDF は受け付けない。
- 他人のプログラム、レポートを写したと判断される場合には、0 点とする。
- 書籍や Web ページ等を参考としている場合には、必ずその出典を明示すること。
- レポートは PDF 形式とし、ファイル名は「学籍番号.pdf」とすること。
- 提出前に、必ず、PDF の内容を十分に確認すること。