「モデリングとシミュレーション実験」
2016年度期末レポート課題

締切:2017/2/13

1　期末レポートについて

期末レポート課題は、以下の通りです。期日までに、理工学部7号館2階のレポートボックスへ提出すること。

- 電子的に作成し、A4用紙に印刷して提出すること。
- 正しい日本語で作成すること。
- 他人のレポートを写したと判断した場合には、不合格とする。
- 書籍やWebページ等を参考としている場合には、必ず出典を明示すること。
- 単に課題に答えるだけでなく、課題の説明、考え方、解答過程、開発したプログラム(java及びgnuplot)も含めて、レポートとして筋道のあるものとすること。

2　Logistic 写像

Logistic写像は、生物集団の個体数の簡単なモデルであるとともに、カオスの基本モデルである。カオスとは、系の時間発展が非常に複雑となる現象の総称である。Logistic写像は非常に簡単なモデルであるにも関わらず、パラメタを変えることで周期運動からカオスへと、その挙動を変化させる。

ある時刻tの変数の値$0 \leq x_t \leq 1$に対して、次の時刻$t+1$の値を

$$x_{t+1} = 4\lambda x_t \left(1 - x_t\right) \tag{2.1}$$

で求める。ここで$0 < \lambda < 1$はパラメタである。ここで、

$$f_\lambda\left(x\right) = 4\lambda x\left(1 - x\right) \tag{2.2}$$

と標記することにする。$x = f_\lambda\left(x\right)$となる$x$を固定点(fixed point)と呼ぶ。

課題1　クラス`Logistic`を作成しなさい。このクラスには、λ, x_{init}、及び現在のxの三つのフィールドを持つとする。

```
private final double lambda;
private final double xInit;
private double x;
```

また、コンストラクタは λ と x_{init} を指定するもの、及び λ だけを指定する二種類とする。後者の場合 $x_{\mathrm{init}} = 0.1$ とする。このようなクラスを作成しなさい。必要に応じて `MyLib.jar` を使用してもよい。

課題 2　次の時間の x の値を計算し、`x` の値を更新するとともに、その値を戻り値とするメソッド `public double update()` を作成しなさい。

課題 3　指定された λ と x に対して $f_\lambda(x)$ の値を返すメソッド

```
public static double map(double lambda,double x)
```

を作成しなさい。

3　一周期運動

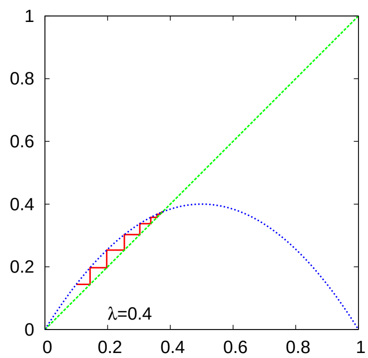

図 1: $\lambda = 0.4$ のときの軌道。固定点に収束する様子が分かる。

$1/4 < \lambda$ では $x = f_\lambda(x)$ の解は $x_1 = 0$ と $x_2 = 1 - 1/(4\lambda)$ の二つとなる。図 1 に $\lambda = 0.4$ のときの、固定点への収束の様子を示す。この図では、ある値 x_k に対して、二つの点 (x_k, x_{k+1}) と (x_{k+1}, x_{k+1}) を k を一つずつ変化させながら結ぶことで生成されている。図中の一つの点は `java.awt.geom.Point2D.Double` クラスのインスタンスを用いて表すことができる。

課題 4　繰り返し回数 n を与えて、x_0 から始める上述の点の列を生成するメソッド

```
public List<Point2D.Double> evalOrbit(int n)
```

及び、開始の x の値を指定する

```
public List<Point2D.Double> evalOrbit(double x, int n)
```

を作成しなさい。このメソッドを使って $\lambda = 0.4$ のときの軌道が、$x = 0.9$ から始まる場合にも固定点に収束することを確かめなさい。その際、Logistic クラスのインスタンスを用い、図 1 のような軌道を描くためのクラス（必要に応じてメインメソッドだけで構成）PrintOrbit を作成しなさい。

4　二周期運動

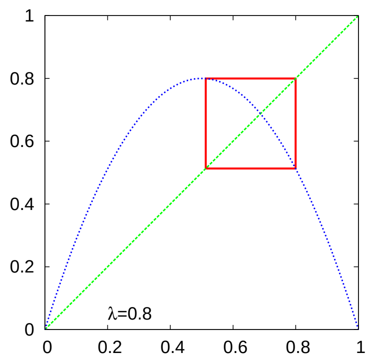

図 2: $\lambda = 0.8$ のときの軌道。二つの点を交互に移動している。

$\lambda \to 3/4$ で $f'_\lambda(x_2) \to -1$ となり、不安定となる。λ が $3/4$ より大きくなると一周期運動に代わって出現するのが、x の二つの値を交互に移動する二周期運動である。図 2 は、$\lambda = 0.8$ の場合の軌道である。

合成関数 $F_\lambda^{(k)}(x)$ を以下のように定義する。

$$F_\lambda^{(1)}(x) = f_\lambda(x) \tag{4.1}$$

$$F_\lambda^{(2)}(x) = f_\lambda(f_\lambda(x)) \tag{4.2}$$

$$F_\lambda^{(k+1)}(x) = f_\lambda\left(F_\lambda^{(k)}(x)\right) \tag{4.3}$$

この時、$x_\pm$ は $x = F_\lambda^{(2)}(x)$ の固定点である。

課題 5　図 2 のグラフに代わって、曲線を $f_\lambda(x)$ ではなく、$F_\lambda^{(2)}(x)$ を描くことで、$x = F_\lambda^{(2)}(x)$ となる二つの点を交互に移動していることを示しなさい。

課題 6　x_t が t とともに、変化する様子を調べよう。指定された初期値 x から $(0, x_0)$、$(1, x_1)$、$(2, x_2)$ と、Point2D.Double のリストを返すメソッド

```
public List<Point2D.Double> timeEvolution(double x,int n)
```

を作成しなさい。ここで`n`は繰り返し回数である。このメソッドを用いて、時間変化を求めるクラス`PrintMotion`を作成し、$\lambda = 0.8$に対して、初期値が0.2と0.3の場合に、二つの軌道が一つに収束する様子を図示しなさい。nは30程度で十分である。

5　周期倍加からカオスへ

$\lambda = \left(1 + \sqrt{6}\right)/4$で二周期運動は不安定となり、四周期運動が出現する。λが増加すると四周期運動も不安定となり、八周期運動が出現する。このようにパラメタの変化に伴って倍の周期が次々と現れることを周期倍加と呼ぶ。

Logistic写像では、周期倍加の起こるλの幅は次第に狭くなり、$\lambda < 1$で周期が無限となってしまう。もはや運動は周期的ではないが、まったくでたらめでもない。初期条件のわずかな差は急速に拡大されるために、動きの予想ができない。このような運動をカオスと呼ぶ。図3は$\lambda = 0.9$の軌道である。複雑なふるまいとなっている。

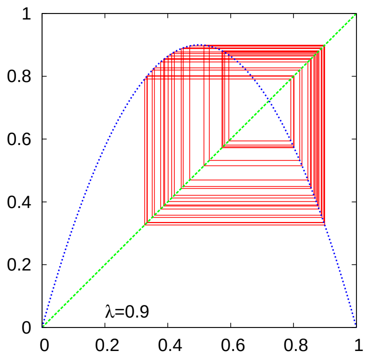

図3: $\lambda = 0.9$のときの軌道。カオスを示す。

$\lambda = 0.9$の場合は、軌道は二つの区間に限定されていることに注目する。左側の区間$A = \left[F_\lambda^{(2)}(1/2), F_\lambda^{(4)}(1/2)\right]$と右側の区間$B = \left[F_\lambda^{(3)}(1/2), F_\lambda^{(1)}(1/2)\right]$である。また、この区間内の点の分布も均一ではない。このことを調べる。

課題7　$\lambda = 0.9$にたいして、100回の状態更新を行ったのち、100,000回のxのデータの分布を調べなさい。このとき、区間$[0, 1)$を1000個のbinに区切って分布を調べ図示しなさい。

課題8　クラス`PrintMotion`を用いて、$\lambda = 0.9$の場合に、初期値が0.2と0.2001の場合を描き、最初にほぼ近くに居た軌道が、やがて離れてしまう様子を観察しなさい。nは60程度で十分である。また、その値が上述の二つの区間に限定されていることも示しなさい。