Networkモデル
Random network
モデリングとシミュレーション

2019年度

要素の関係をグラフ・ネットワークとして捉える

- 要素と要素の繋がり方
- 実在するネットワークに共通的性質
- なぜそのような構造なのか
  - ネットワーク形成メカニズム
  - 構造の利点
  - 最適化？
- ネットワーク上の過程

実際のネットワークの例

- インターネット
- Webのリンク
- 知人の繋がり
- 映画俳優の共演関係
- 論文を共著する関係
- 食物連鎖
- たんぱく質の反応連鎖
- 電力網

ネットワークの例

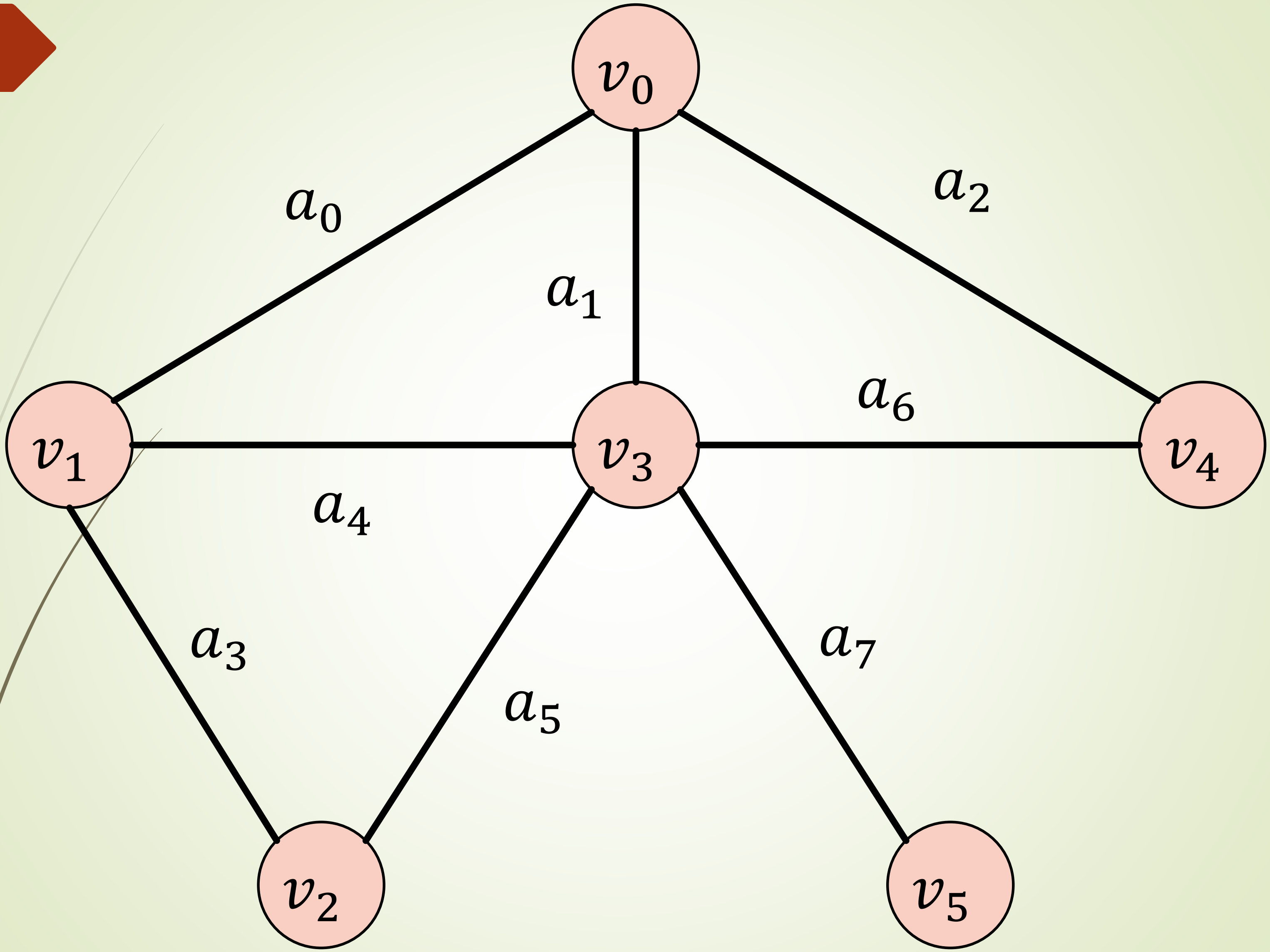
- JR九州路線図
  - https://www.jrkyushu.co.jp/railway/routemap/
- 佐賀市営バス路線図
  - http://www.bus.saga.saga.jp/pdf/rosenzu011001.pdf
- SINET
  - https://www.sinet.ad.jp/aboutsinet
- The Internet map
  - https://internet-map.net/

Network (Graph)

- 頂点 (node)を辺 (edge)で結んだもの
- 結び方そのものに関心

グラフの記述

- V：頂点の集合
- A：弧の集合
- $\delta: V \to 2^A$：指定した頂点に接続する弧の集合
- $\partial: A \to V \times V$：弧両端の頂点


v_0
a_0
a_1
a_2
v_1
v_3
a_6
v_4
a_4
a_3
a_7
a_5
v_2
v_5

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

$$\delta(v_0) = \{a_0, a_1, a_2\} \quad \delta(v_1) = \{a_0, a_3, a_4\} \quad \delta(v_2) = \{a_3, a_5\}$$
$$\delta(v_3) = \{a_1, a_4, a_5, a_6, a_7\} \quad \delta(v_4) = \{a_2, a_6\} \quad \delta(v_5) = \{a_7\}$$

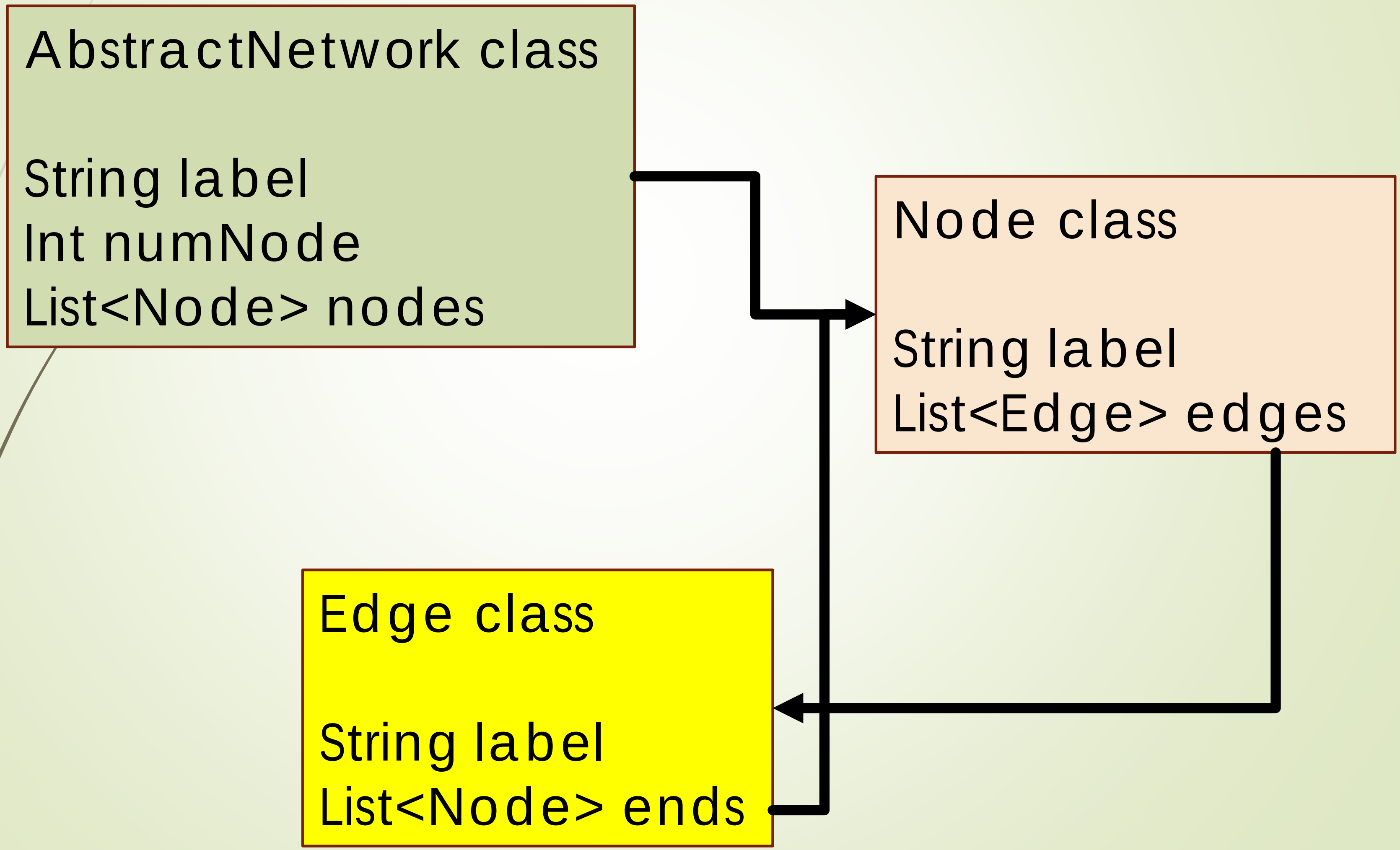
$$\partial(a_0) = (v_0, v_1) \quad \partial(a_1) = (v_0, v_3) \quad \partial(a_2) = (v_0, v_4)$$
$$\partial(a_3) = (v_1, v_2) \quad \partial(a_4) = (v_1, v_3) \quad \partial(a_5) = (v_2, v_3)$$
$$\partial(a_6) = (v_3, v_4) \quad \partial(a_7) = (v_3, v_5)$$

グラフの記述
隣接行列

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{頂点}i\text{と頂点}j\text{が結ばれている} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Networkのプログラムとしての実装



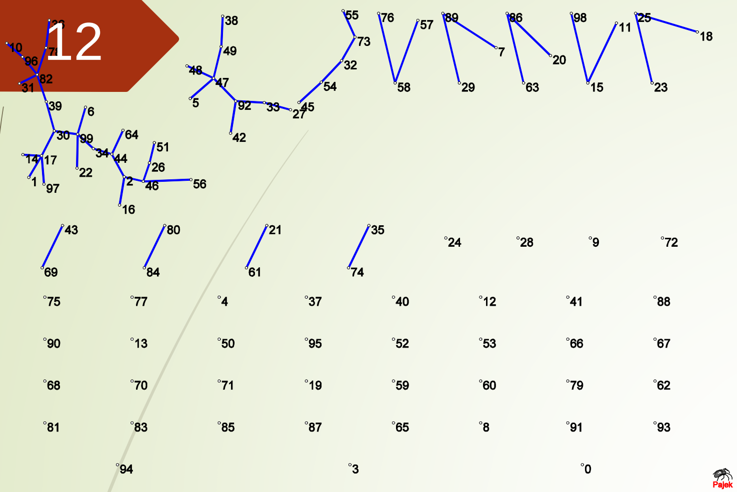
Erdös-Rényi Random Graph

- 一定数Nの頂点を用意する
- 一定数Lの辺をランダムに選んだ頂点の組に接続する

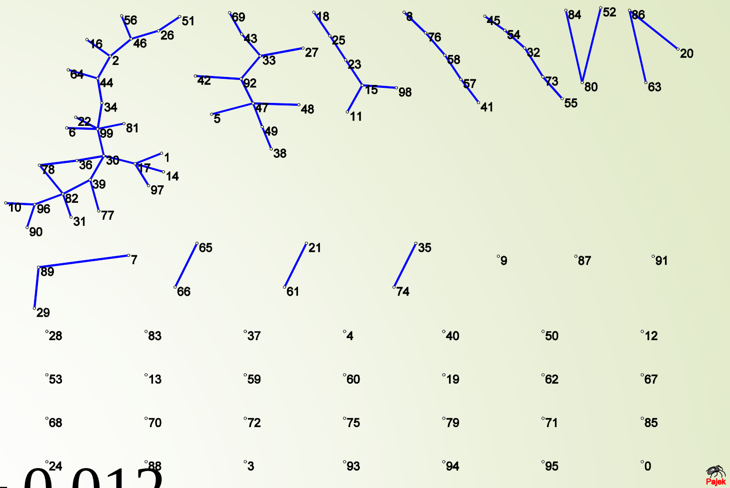
$$L = p\frac{N(N-1)}{2}$$

- 単純グラフであることは求めない
  - 頂点vから頂点vへの辺：孤立辺
  - 頂点vから頂点wへの辺が複数：並列辺

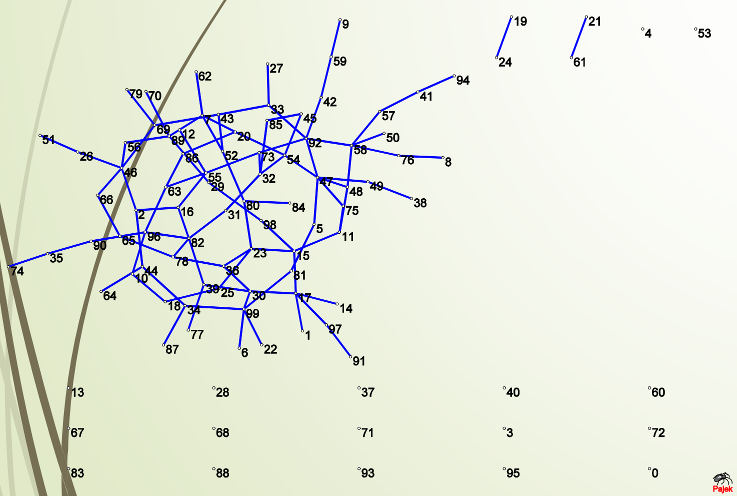
$N = 100$



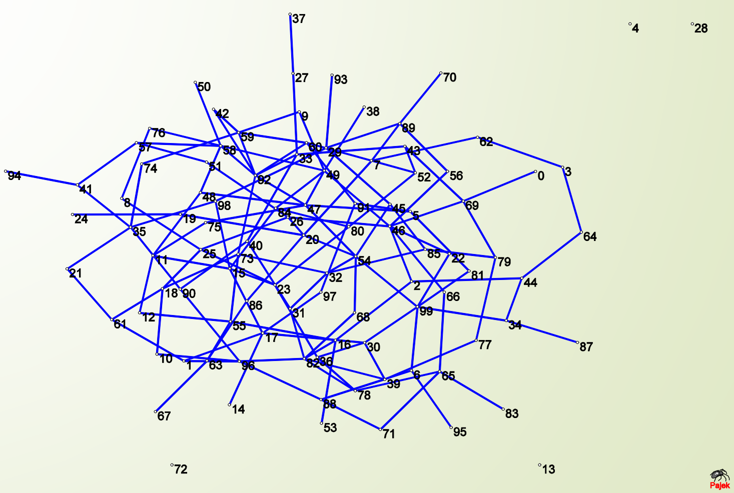
$p = 0.01$



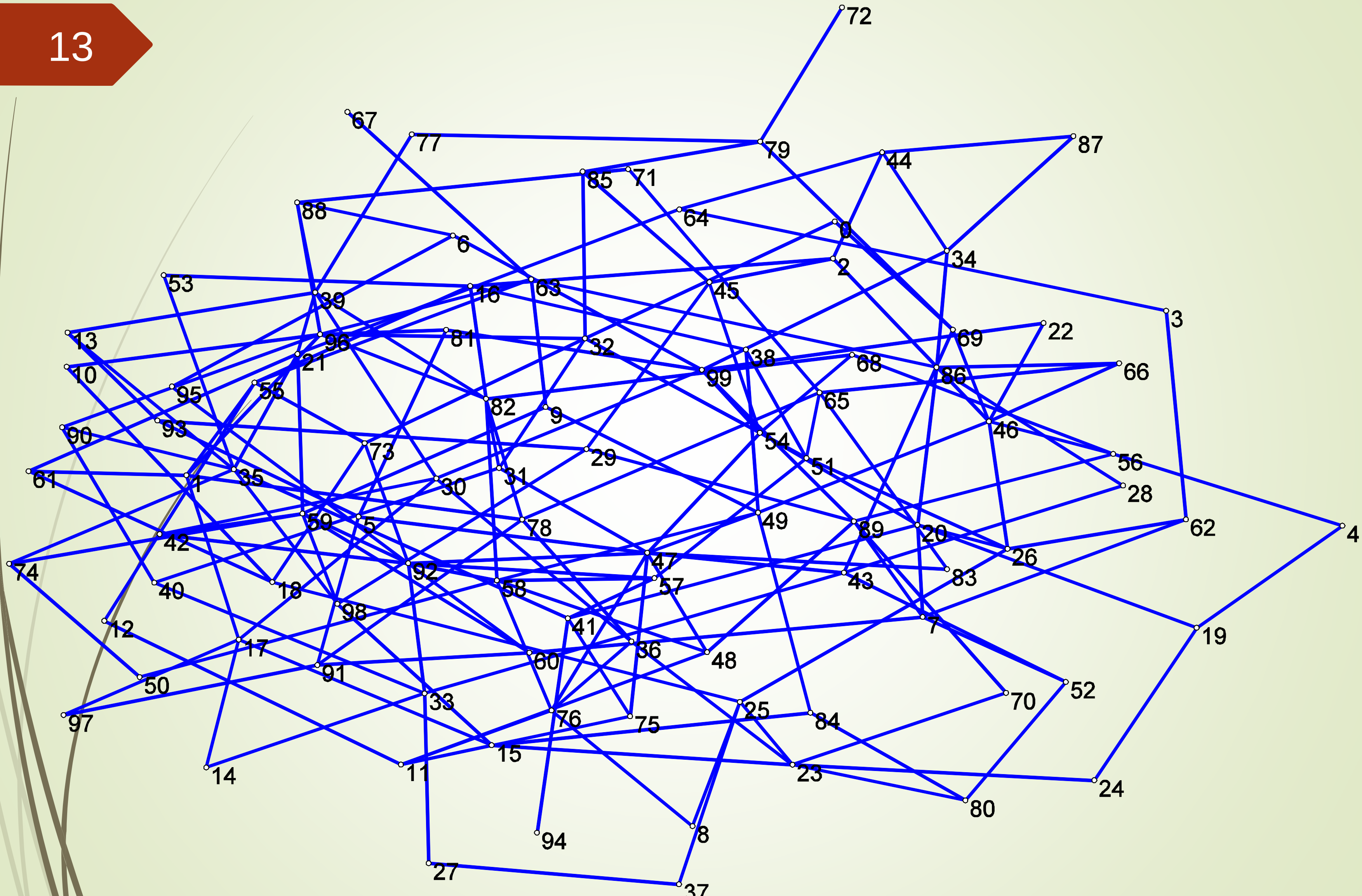
$p = 0.012$



$p = 0.02$



$p = 0.03$


72
67
77
79
87
44
85
71
88
64
0
6
34
2
53
39
16
63
45
3
13
96
81
32
69
22
10
21
38
68
86
66
95
55
99
65
82
9
46
93
90
73
29
54
51
56
61
1
35
30
31
28
59
5
78
49
89
20
62
4
42
47
26
74
92
58
57
43
83
40
18
98
41
7
12
17
36
48
19
60
50
91
33
25
52
70
97
76
75
84
15
14
11
23
24
80
94
8
27
37

$p = 0.04$

Pajek

Giant Component

- 辺を持つ確率pが小さい
  - 連結されていない小さいネットワークに分かれている
  - 平均距離は短い:連結の場合だけを考える
- 辺を持つ確率pが非常に大きい
  - 全体が連結されている
  - 多くの頂点と直接結ばれている：平均距離は短い
- 中間のpで何が起こる？
- 全頂点とほぼ同じサイズの連結成分をgiant componentと呼ぶ

- 任意の頂点がgiant componentに属していない確率u
- giant componentに属していないためには
  - 全く隣接頂点がない
  - 全ての隣接頂点が、giant Componentに属さない

- まったく他の頂点と繋がっていない確率：$1-p$
- 隣接頂点は繋がっているが、*giant Component*に属さない：pu

$$u=\left(1-p+pu\right)^{N-1}=\left[1-\frac{c}{N-1}\left(1-u\right)\right]^{N-1}$$

$$c\equiv\left(N-1\right)p$$

$$\ln u = (N-1)\ln\left[1-\frac{c}{N-1}(1-u)\right]$$

$$\simeq (N-1)\left[-\frac{c}{N-1}(1-u)+O\left((N-1)^{-2}\right)\right] = -c(1-u)$$

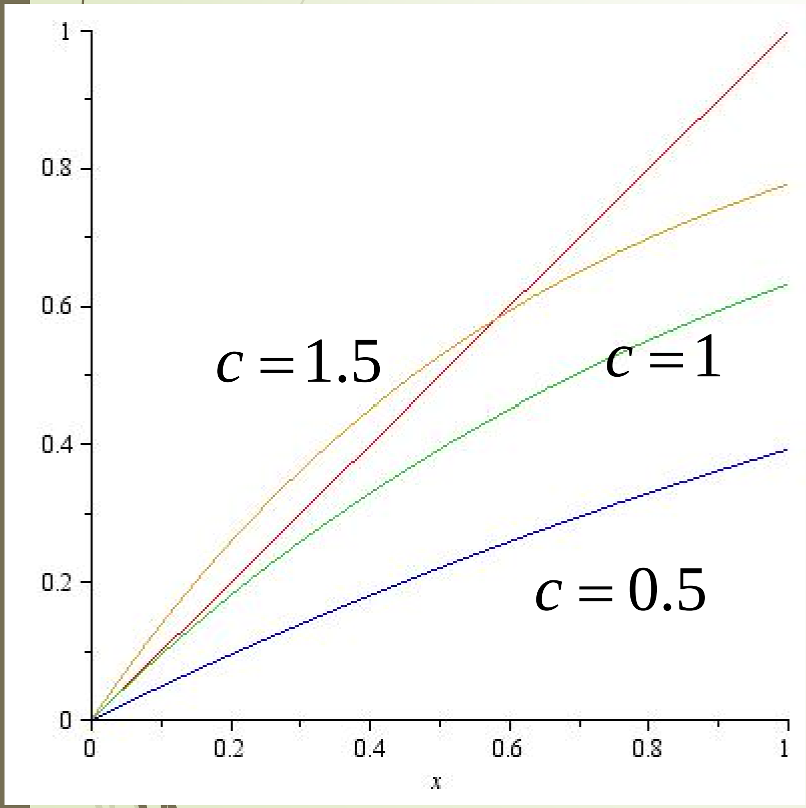
$$u = e^{-c(1-u)}$$

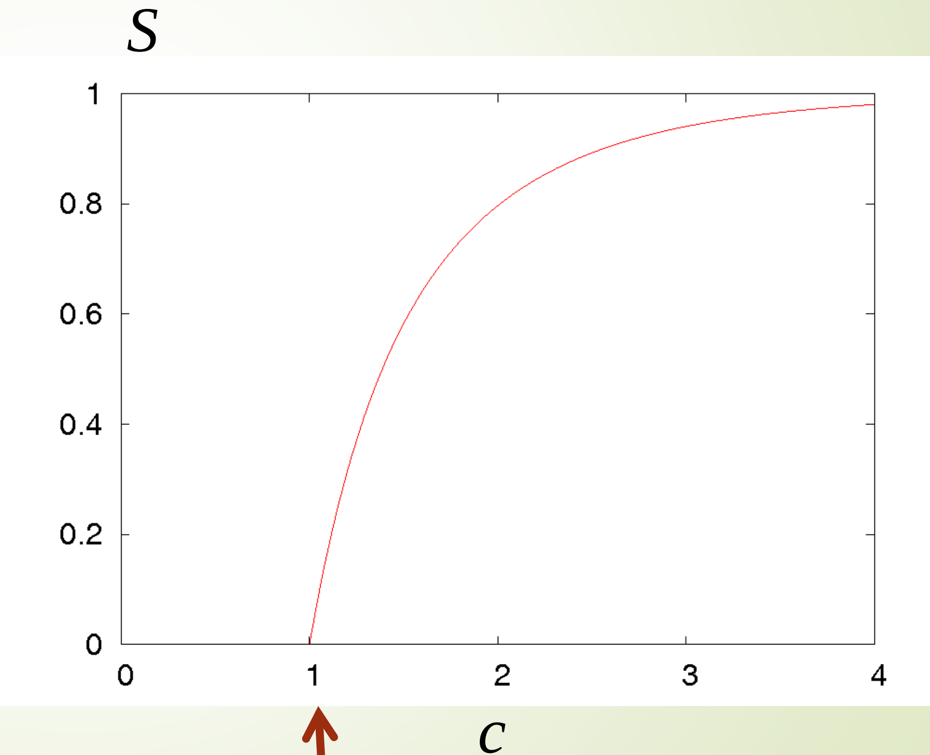
- Giant componentに入っている節の比：$S = 1 - u$

$$S = 1 - e^{-cS}$$

- S に対する方程式に対して、自己無撞着(self-consistent)に数値的解を得る

$c > 1$で曲線と直線の交点が発生





突然giant componentが出現

Simulation

- 頂点を連結した頂点の集合に分類する
- 一番大きな集合のサイズがpに対して変化する様子を調べる

幅優先探索

BFS(U, v_0){// U対象頂点の集合、v_0始点

L=∅//処理済み頂点集合

Q//調査すべき頂点の待ち行列

$Q \hookleftarrow v_0$// Qにv_0を追加

while (Q≠∅) {

v=Q.poll// Qの先頭要素を取り出し

forall ($a \in \delta^{+} v$) {// aから出る全ての弧

$w = \partial^{-} a$// aの反対側の頂点

if ($w \notin L \wedge w \notin Q$) {$Q \hookleftarrow w$}

}

$L \leftarrow L \cup \{v\}$// Lへvを追加

}

return L//始点から到達可能な頂点の集合

}

頂点を連結集合（クラスタ）へ分割：幅優先探索の応用

- $U \subseteq V$：未分類の頂点の集合。初期値は$U = V$
- $C \subseteq 2^V$：クラスタの集合。初期値は$C = \emptyset$

while ($U \neq \emptyset$){

$w \in U$ //Uから選ぶ

$L = BSF(U, w)$ //wから到達可能な頂点の集合

$U \leftarrow U \setminus L$// UからLを削除

$C \leftarrow C \cup \{L\}$

}