Networkモデル
Random network
モデリングとシミュレーション

2017年度

要素の関係をグラフ・ネットワークとして捉える

- 要素と要素の繋がり方
- 実在するネットワークに共通的性質
- なぜそのような構造なのか
  - ネットワーク形成メカニズム
  - 構造の利点
  - 最適化？
- ネットワーク上の過程

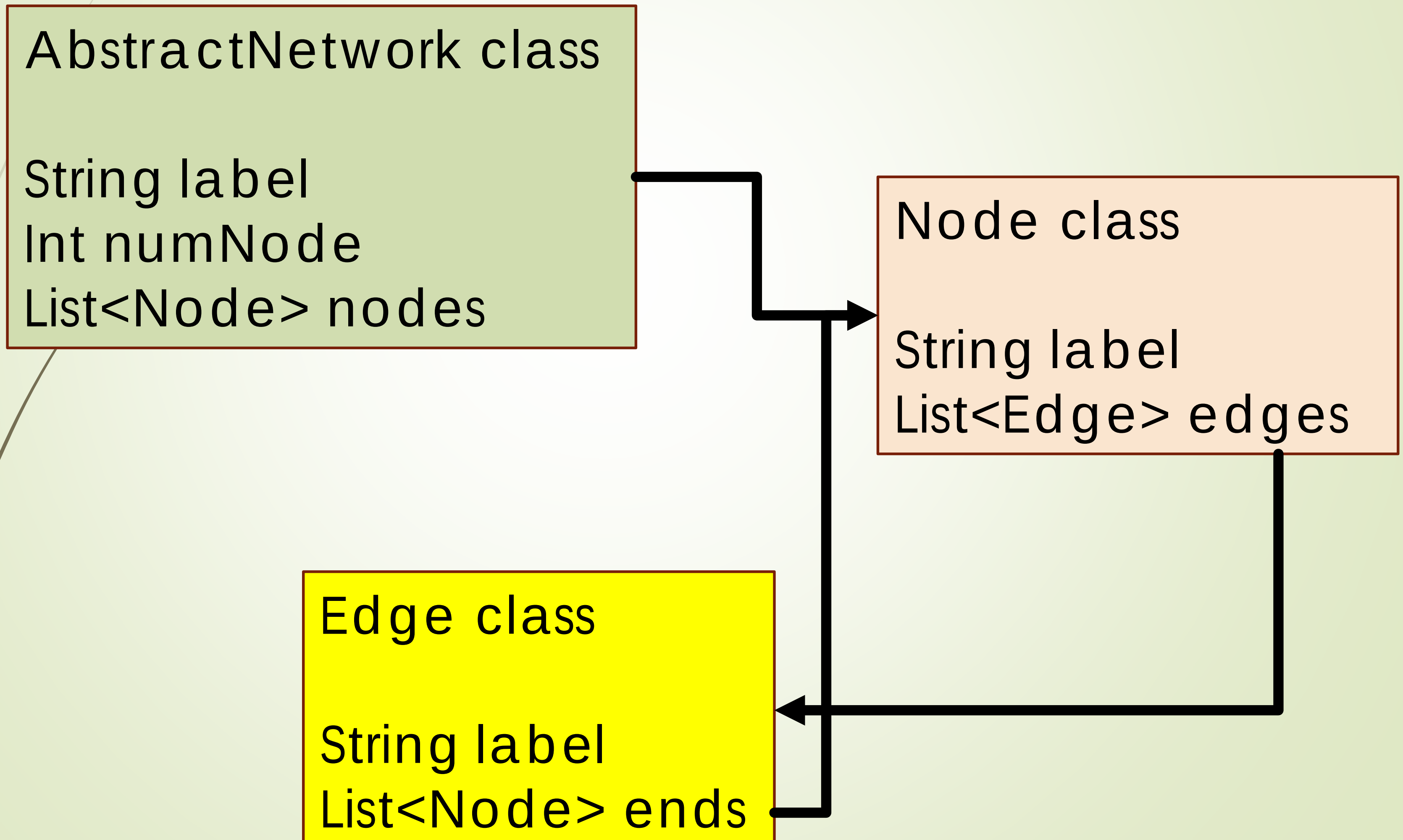
実際のネットワークの例

- インターネット
- Webのリンク
- 知人の繋がり
- 映画俳優の共演関係
- 論文を共著する関係
- 食物連鎖
- たんぱく質の反応連鎖
- 電力網

Network (Graph)

- 頂点 (node)を辺 (edge)で結んだもの
- 結び方そのものに関心

Networkのプログラムとしての実装



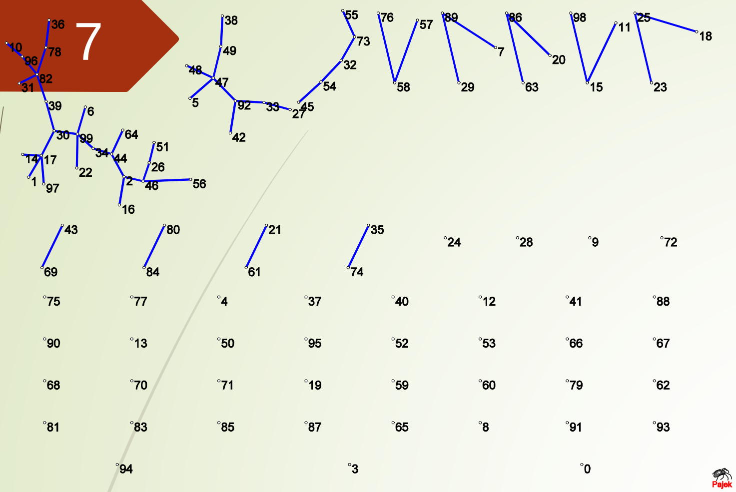
Erdös-Rényi Random Graph

- 一定数Nの節を用意する
- 一定数Lの辺をランダムに選んだ節の組に接続する

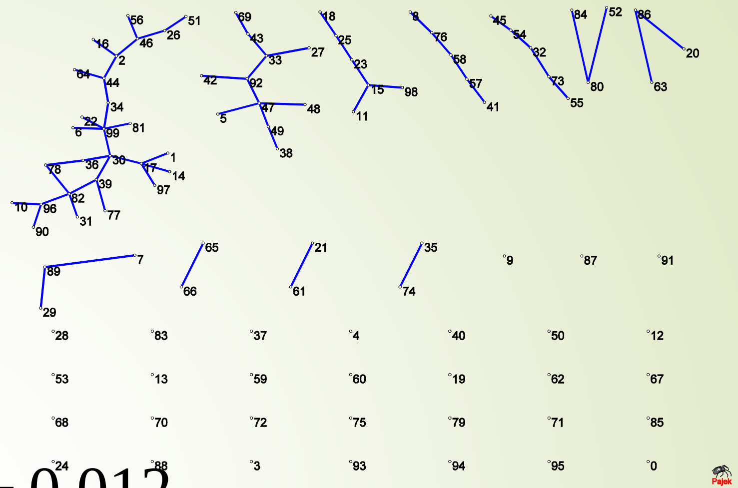
$$L = p\frac{N(N-1)}{2}$$

- 単純グラフであることは求めない
  - 頂点vからへの頂点vへの辺：孤立辺
  - 頂点vからへの頂点wへの辺が複数：並列辺

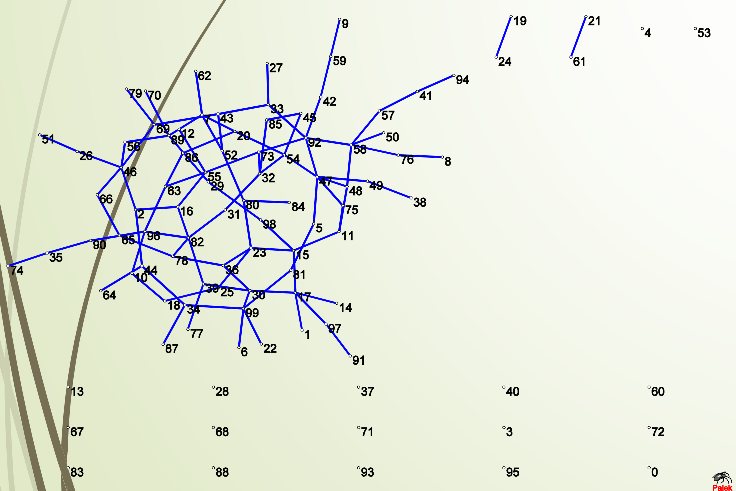
$N = 100$



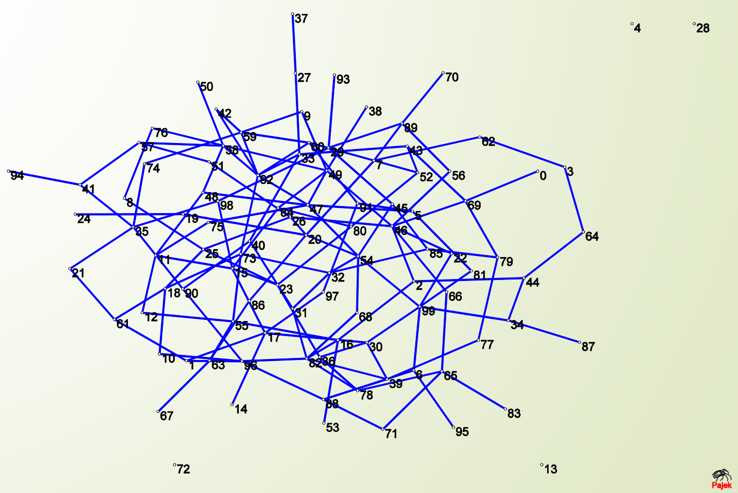
$p = 0.01$



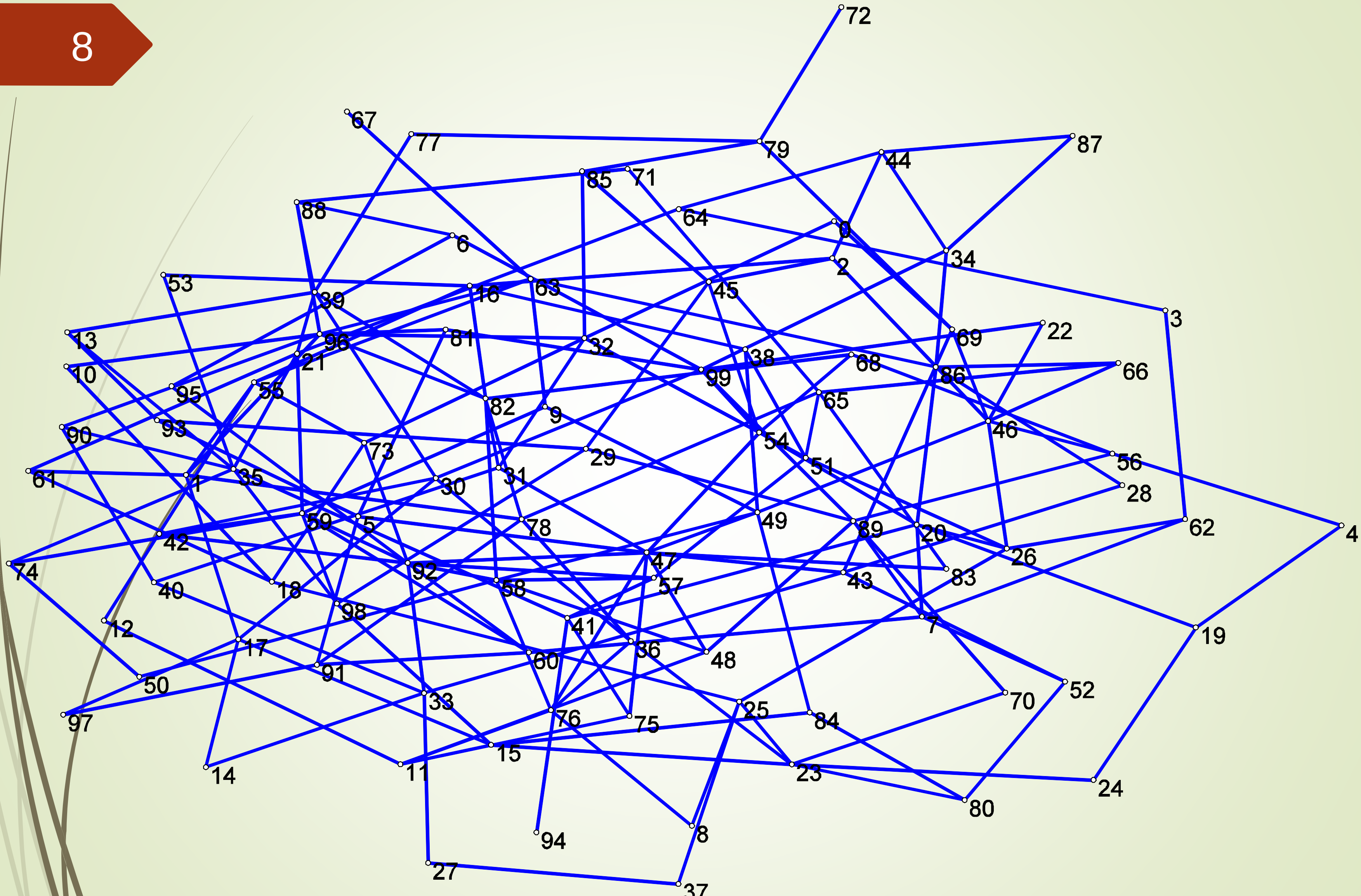
$p = 0.012$



$p = 0.02$



$p = 0.03$


72
67
77
79
87
44
85
71
64
88
0
6
34
2
53
63
16
45
39
3
69
22
13
96
81
32
38
68
86
66
21
10
99
55
95
65
82
9
46
93
90
54
73
29
51
56
61
31
1
35
30
28
78
59
5
49
89
20
62
4
42
26
47
74
92
83
57
58
43
40
18
98
7
41
12
19
17
36
48
60
91
52
50
70
33
25
76
97
84
75
15
23
14
11
24
80
94
8
27
37

$p = 0.04$

Pajek

Giant Component

- 辺を持つ確率pが小さい
  - 連結されていない小さいネットワークに分かれている
  - 平均距離は短い:連結の場合だけを考える
- 辺を持つ確率pが非常に大きい
  - 全体が連結されている
  - 多くの頂点と直接結ばれている：平均距離は短い
- 中間のpで何が起こる？
- 全頂点とほぼ同じサイズの連結成分をgiant componentと呼ぶ

- 任意の頂点がgiant componentに属していない確率u
- 節iとjを考える
  - 節iとjがつながっていない確率：$1-p$
  - 節iとjが節jを通じてgiant componentにつながっていない確率：pu

$$u=(1-p+pu)^{N-1}=\left[1-\frac{c}{N-1}(1-u)\right]^{N-1}$$

$$c\equiv(N-1)p$$

$$\ln u = (N-1)\ln\left[1-\frac{c}{N-1}(1-u)\right]$$

$$\simeq (N-1)\left[-\frac{c}{N-1}(1-u)+O\left((N-1)^2\right)\right] = -c(1-u)$$

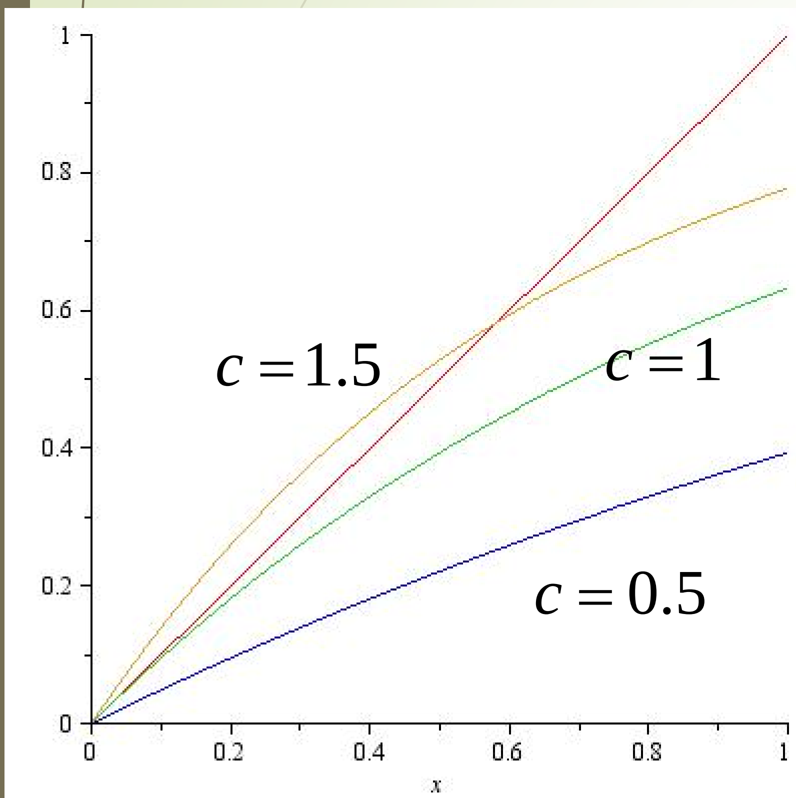
$$u = e^{-c(1-u)}$$

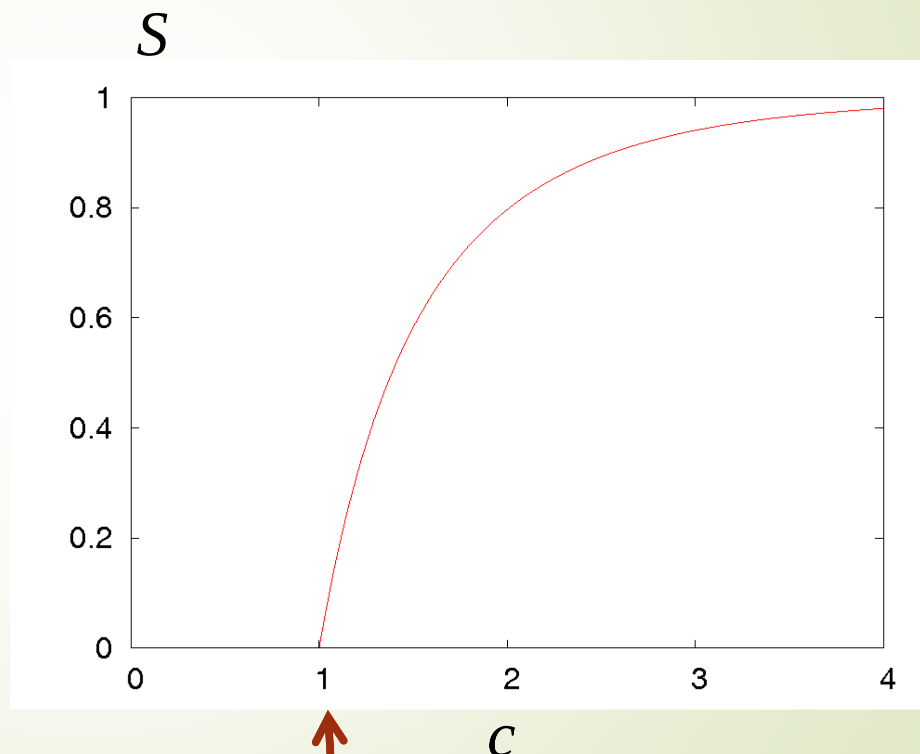
- Giant componentに入っている節の比：$S = 1 - u$

$$S = 1 - e^{-cS}$$

- S に対する方程式に対して、自己無撞着(self-consisntent)に数値的解を得る

$c>1$で曲線と直線の交点が発生





突然giant componentが出現

Simulation

- 頂点を連結した頂点の集合に分類する
- 一番大きな集合のサイズがpに対して変化する様子を調べる

幅優先探索

BFS(U, v_0){// U対象頂点の集合、v_0始点

L=∅//処理済み頂点集合

Q//調査すべき頂点の待ち行列

Q↤v_0// Qにv_0を追加

while (Q≠∅) {

v=Q.poll// Qの先頭要素を取り出し

forall ($a \in \delta^+ v$) {// aから出る全ての弧

$w = \partial^- a$// aの反対側の頂点

if (w∉L∧w∉Q) {Q↤w}

}

L←L∪{v}// Lへvを追加

}

return L//始点から到達可能な頂点の集合

}

頂点を連結集合（クラスタ）へ分割：幅優先探索の応用

- $U \subseteq V$：未分類の頂点の集合。初期値は$U = V$
- $C \subseteq 2^V$：クラスタの集合。初期値は$C = \emptyset$

```
while (U ≠ ∅){
    w ∈ U //Uから選ぶ
    L = BSF(U, w) //wから到達可能な頂点の集合
    U ← U \ L // UからLを削除
    C ← C ∪ {L}
}
```