乱数とヒストグラム

モデリングとシミュレーション

2019年度

乱数(Random Numbers)

- でたらめに生成される数の列
- 例：サイコロの目の列
- 例：0から$N-1$までの整数乱数
  - 出る順番がでたらめ
    - 次が予測できない
  - 出る頻度
    - 一様乱数：ほぼ均等
    - 指定された分布に従う場合

乱数とシミュレーション 確率過程

- ある確率pで事象Eが起こる
- 動作が決定的でない場合
  - 対象の外からの予測不能な影響
  - 内部に不確かな要素
    - 構成要素の予測不能な挙動
  - 本質的に確率的現象
    - 量子力学

確率の意味
ある確率pで事象Eが起こる

- 試行を十分大きな回数N回行う
- 事象Eが起こった回数N_E
  - $\frac{N_E}{N} \sim p$
- 例：さいころの1の目が出る確率1/6
  - 十分大きな回数N回、さいころを投げる
  - 1の目がでる回数は、$N/6$に近づく

乱数とシミュレーション Monte Carlo 法

- 乱数を積極的に活用して、近似を行う
- 積分値の近似
  - 代表値を使って近似
- 状態のサンプリング
  - 全状態の数が大きすぎる場合
  - 代表的状態だけを使って近似

疑似乱数 (Pseudo Random Numbers)

- 本物の乱数
  - さいころ
  - 熱雑音
  - 放射性原子の崩壊
- 疑似乱数
  - コンピュータで生成
  - アルゴリズムがあるので「偽物」

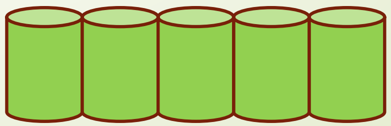
乱数の分布を調べる ヒストグラム (histogram)

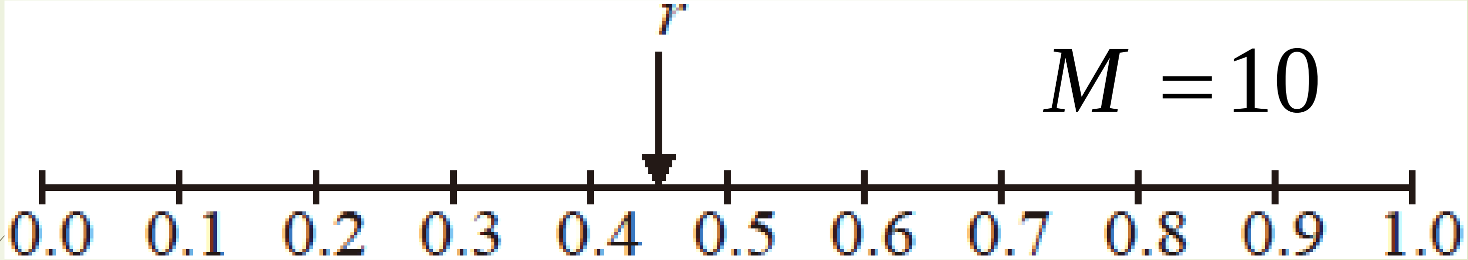
- ある事象が何回起こったか、その頻度あるいは相対頻度
- 0から$N-1$までの乱数
  - $N=2^{31}\cong 2\times 10^{9}$の場合
  - それぞれの整数は何回発生する？
  - そこから何が分かる？

binを使う

bin:
a container that you put waste in
a large container, usually with a lid, for storing things in

- [0,1)の範囲の乱数
  - 各値の発生回数を数えるのは無意味
  - 区間[0,1)をM個に区切る。
    - 各区間をbinと呼ぶ
  - 各binに何個入ったかの頻度または相対頻度を求める
  - binに入る標本数が大きくないと無意味





- r はどの区間に入っている？
- 区間幅をwとすると

$$k = \lfloor r / w \rfloor$$

$$w = 1 / M$$

- 課題：一般化
  - 区間$[a, b)$をM個に分割した場合
    - ある数rが入る区間を判定する方法は？
  - その方法で、$[-0.1, 0.9)$を5個に等分した区間に対して、$\{-0.02, 0.04, 0.22, 0.57\}$はそれぞれどの区間に入ると判定されるか？

理想的一様乱数

- [0,1)の区間に一様乱数が発生したとする
- 乱数の総数はN、区間数はMとする
- ある区間に
  - 一つの乱数が入る確率 $p = 1/M$
  - N個の乱数のうち、区間にk個が入る確率

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

二項係数がでてくる理由は？

平均と分散を求めるには

$$\langle k\rangle = \sum_{k=0}^{N} kP(k) = \sum_{k=0}^{N} k\frac{N!}{k!(N-k)!}p^{k}(1-p)^{N-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{N(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}pp^{k-1}(1-p)^{N-k}$$

$$= Np\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{k!(N-1-k)!}p^{k-1}(1-p)^{N-k} = Np$$

$$\langle k^2\rangle = \langle k(k-1)\rangle + \langle k\rangle = N(N-1)p^2 + Np = Np\left((N-1)p+1\right)$$

$$\langle k(k-1)\rangle = \sum_{k=0}^{N} k(k-1)\frac{N!}{k!(N-k)!}p^{k}(1-p)^{N-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{N} \frac{N(N-1)(N-2)!}{(k-2)!(N-k)!}p^2p^{k-2}(1-p)^{N-k}$$

$$= N(N-1)p^2$$

もっと効率よく計算したい

確率母関数
Probability generating function

$$G(z)=\sum_{k=0}^{N}P(k)z^{k}$$

和の範囲に注意

$$G(1)=\sum_{k=0}^{N}P(k)=1$$

母関数の具体的形が分かると、平均や二乗平均が容易に求められる

$$G'(z)=\sum_{k=1}^{N}kP(k)z^{k-1}$$

$$G'(1)=\sum_{k=1}^{N}kP(k)=\sum_{k=0}^{N}kP(k)=\langle k\rangle$$

$$G''(z)=\sum_{k=2}^{N}k(k-1)P(k)z^{k-2}$$

$$G''(1)=\sum_{k=2}^{N}k(k-1)P(k)=\sum_{k=0}^{N}k(k-1)P(k)=\langle k^{2}\rangle-\langle k\rangle$$

二項分布に対する確率母関数

$$G(z)=\sum_{k=0}^{N}P(k)z^k=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}z^k$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(zp)^k(1-p)^{N-k}=(zp+1-p)^N$$

$G(z)$の具体的関数形が分かると微分が具体的に計算可能

$$G'(z)=Np(zp+1-p)^{N-1}$$

$$G''(z)=N(N-1)p^2(zp+1-p)^{N-2}$$

二項分布に対する平均と標準偏差

$$G'(1) = Np = \langle k \rangle$$

$$G''(1) = N(N-1)p^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle$$

$$\langle k^2 \rangle = N(N-1)p^2 + Np$$

重要：$\sigma \propto N$

$$\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np(1-p)$$

$$\frac{\sigma}{\langle k \rangle} = \left(\frac{1-p}{p} \frac{1}{N} \right)^{1/2}$$

重要：$\sigma/\langle k \rangle \propto N^{-1/2}$

相対頻度と確率密度

- 区間$[a,b)$をN個のbinに分割
- 各区間の頻度F_i、相対頻度$f_i = F_i/N$
- 相対頻度は確率分布として理解できる？
  - 離散的確率と考えると、規格化は

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F_i = 1$$

- 連続的確率密度と考えると

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

- 積分は面積→小さな台形の和
- 対応する和は、binの幅$w = (b-a)/N$として

$$\sum_{i=0}^{N-1} w \frac{f_i}{w} = 1$$

$$\frac{f_i}{w} \to p(x_i),\ \ x_i = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) w$$