「モデリングとシミュレーション」

2019 年度期末レポート課題

締切:2020/2/10

1　ネットワーク上の酔歩

頂点 (vertex) と頂点をつなぐ辺 (edge) からなるシステムをネットワーク (network) と呼ぶ。グラフ理論では、グラフ (graph) とネットワークを区別する場合があるが、ここでは区別しない。このネットワーク上を粒子が酔歩する問題を考える。

1.1　ネットワークの定義

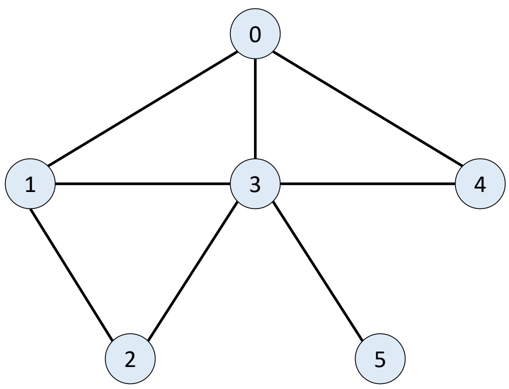

図 1　簡単なグラフの例

N 個の頂点 $\{v_i\}$ からなる無向ネットワーク、つまり辺に向きのないネットワークを考える。頂点の連結の様子を隣接行列 (adjacency matrix)A で表すことにする。行列 A の要素は

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{頂点 } i \text{ と } j \text{ が結ばれている} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{1.1}$$

である。簡単なグラフ図 1 に対する隣接行列は式 (1.2) で表される。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

課題 1　式 (1.3) で表される隣接行列に対応するネットワークを図示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

1.2　ネットワーク上の酔歩

M 個の粒子がネットワーク上をランダムに移動することを考える。各時刻で、各粒子は隣接する頂点の一つを等確率で選び、必ず移動する。ただし、粒子はお互いに独立に移動するものとする。つまり、k 個の隣接頂点がある頂点に粒子が居る場合には、その粒子は次の時刻に、隣接する頂点の一つを確率 $1/k$ で選び、移動する。図 1 の場合では、v_5 に居る粒子は必ず v_3 へ移動し、v_2 に居る粒子は、v_1、v_3 のいずれかへ等しい確率 $1/2$ で移動する。

2　Master 方程式

2.1　一次元酔歩

講義で扱った酔歩では、ある位置 x に居る粒子 M_x の割合 M_x/M を問題とした。M は酔歩する粒子の総数である。M が十分に大きい場合には、$p_x = M_x/M$ を一つの粒子を位置 x に発見する確率とみることもできる。

確率の時間発展を記述する方程式を Master 方程式と呼ぶ。右へ移動する確率を p、左に移動する確率を $1-p$ とする。時刻 t、位置 x に粒子を見出す確率を $P(t,x)$ とする。

位置 x へは、直前の時刻に $x \pm 1$ に居る粒子のみが移動してくることから、

$$P(t,x) = pP(t-1,x-1) + (1-p)P(t-1,x+1) \tag{2.1}$$

となる。時刻 $t-1$ に位置 x も居た全ての粒子は隣接する位置のいずれかに移動することに注意する。

時刻 $t=0$ で全ての粒子が $x=0$ から移動を開始することから、初期の値は

$$P(0,x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{2.2}$$

である。$t=1$ では、

$$P(1,1)=pP(0,0)+(1-p)P(0,2)=p \tag{2.3}$$
$$P(1,-1)=pP(0,-2)+(1-p)P(0,0)=1-p \tag{2.4}$$
$$P(1,x)=0 \quad \text{for } x\neq\pm1 \tag{2.5}$$

となる。

課題 2　$P(2,x)$ 及び $P(3,x)$ を求めなさい。

2.2 ネットワーク上の酔歩

一次元酔歩の Master 方程式を参考にネットワーク上の酔歩に対応する Master 方程式を構成しよう。時刻 t において、頂点 v_i に粒子が居る確率を $P(t,i)$ とする。頂点 v_i の次数、つまり隣接頂点数を k_i とする。

時刻 t における図 1 の頂点 v_0 を考えよう。この頂点へは、頂点 v_1、v_3 及び v_4 から粒子が移動してくる。従って、$P(t,0)$ は式 (2.6) のように表すことができる。

$$P(t,0)=\frac{1}{k_1}P(t-1,1)+\frac{1}{k_3}P(t-1,3)+\frac{1}{k_4}P(t-1,4) \tag{2.6}$$

課題 3　式 (2.6) は式 (2.7) のように一般化できることを説明しなさい。

$$P(t,i)=\sum_j \frac{A_{ij}}{k_j}P(t-1,j) \tag{2.7}$$

ただし、$k_j=0$ の場合には、$A_{ij}=0$ であることから、$A_{ij}/k_j=0$ とする。

2.3　ネットワーク上の酔歩に対する平衡解

十分時間が経過した後、各頂点に居る確率が変化しなくなるであろう。これを平衡解と呼ぶ。つまり、式 (2.7) において、t を消去した式

$$P(i) = \sum_j \frac{A_{ij}}{k_j} P(j) \tag{2.8}$$

の解である。

課題 4　$P(i) = ck_i$ が式 (2.8) の解であることを示しなさい。ここで c は定数である。

課題 5　$P(i)$ は確率であるために、規格化されていなければならない。規格化定数 c を求めなさい。

3　レポート提出

レポートは以下のように作成し、締切日の 12 時までに提出すること。

- 課題に沿って、内容を記載すること。ただし、単に課題の答えを記載するだけでは不十分である。課題の記述・理解、方法なども課題に前後して記載することで、レポートそのもので問題設定から解決までが読み取れる形式とすること。
- 「考察」として、レポートを通じて得たことを記載すること。
- 正しい日本語または英語で記述すること。Word や LaTeX などを使って、適切に組版すること。必要なプログラム、スクリプト、図も入れ込むこと。単なるテキストファイルの PDF は受け付けない。
- 他人のプログラム、レポートを写したと判断される場合には、0 点とする。
- 書籍や Web ページ等を参考としている場合には、必ずその出典を明示すること。
- レポートは PDF 形式とし、教務システムのポータルより提出すること。
- 提出前に、必ず、PDF の内容を十分に確認すること。