

基本的な力学問題

Runge-Kutta法

モデリングとシミュレーション

1

2018年度

連立常微分方程式の数値解法 Runge-Kutta法

- ▶ 独立変数を t 、従属変数を \vec{y} とする以下の連立微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y})$$

- ▶ 数値解： t を h 刻みで増加させ、従属変数の列を得る

$$(t_n, \vec{y}_n) \rightarrow (t_{n+1} = t_n + h, \vec{y}_{n+1})$$

4次のRunge-Kutta法

$$\vec{k}_1 = hf \left(t_n, \vec{y}_n \right)$$

$$\vec{k}_2 = hf \left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{2} \right)$$

$$\vec{k}_3 = hf \left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_2}{2} \right)$$

$$\vec{k}_4 = hf \left(t_n + h, \vec{y}_n + \vec{k}_3 \right)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{6} + \frac{\vec{k}_2}{3} + \frac{\vec{k}_3}{3} + \frac{\vec{k}_4}{6} + O(h^5)$$

x1からx2までnstep刻みで独立変数を進める

```
/**
 * solve by rk4 from x1 to x2 with nstep
 * @param vstart start values of dependent variables
 * @param x1    initial value of independent variable
 * @param x2    final value of independent variable
 * @param nstep the number of steps between x1 and x2
 * @param eq    class contains differential equations
 * @return     sequence of values of dependent variables
 */
public static double[][] rk4(
    double vstart[], double x1, double x2, int nstep,
    DifferentialEquation eq)
```

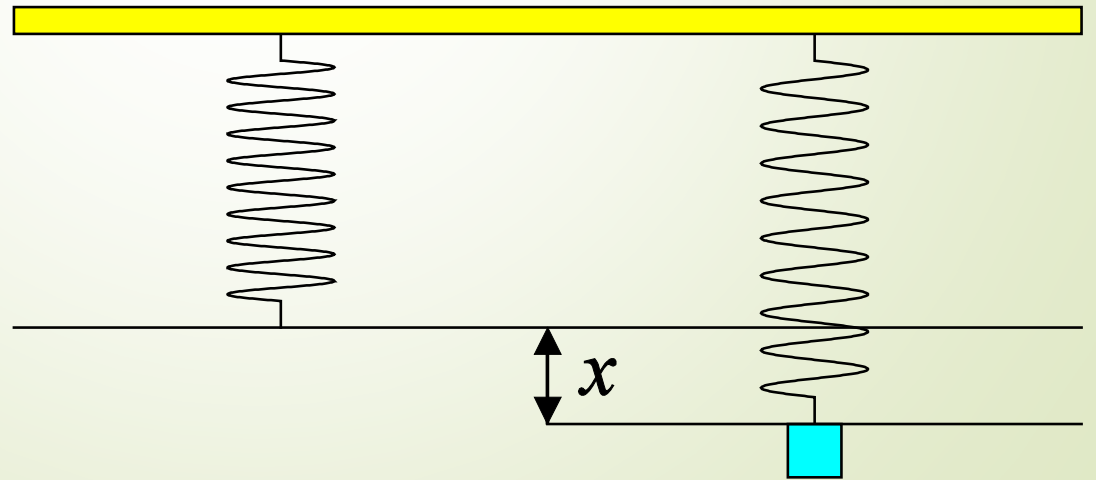
戻り値の最初のインデクスは変数インデクス、二番目は独立変数のステップ

例：バネの振動

▶ Hooke の法則

▶ 力は変位に比例する

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$



一般解

- ➡ 一般解は、二つの解の重ね合わせ

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

- ➡ 別の表現

$$\begin{aligned} x &= C \cos(\omega t + \delta) \\ &= C (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) \end{aligned}$$

$$A = C \cos \delta$$

$$B = -C \sin \delta$$

三角関数と指数関数

▶ Eulerの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数を用いた解

➡ 一般解 $x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$, $\omega^2 = k/m$

➡ 例えば、以下のような初期値の場合

$$x(0) = 0, \quad v(0) = v_0$$

➡ 一般解から

$$x(0) = a + b = 0, \quad v(0) = i\omega(a - b) = v_0$$

⇓

$$a = -b = -i \frac{v_0}{2\omega}$$

$$x(t) = -i \frac{v_0}{2\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

二階微分方程式の一階連立微分方程式への変換

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

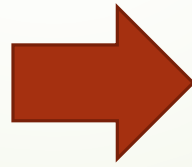


$$\frac{dv}{dt} = F(x, v)$$

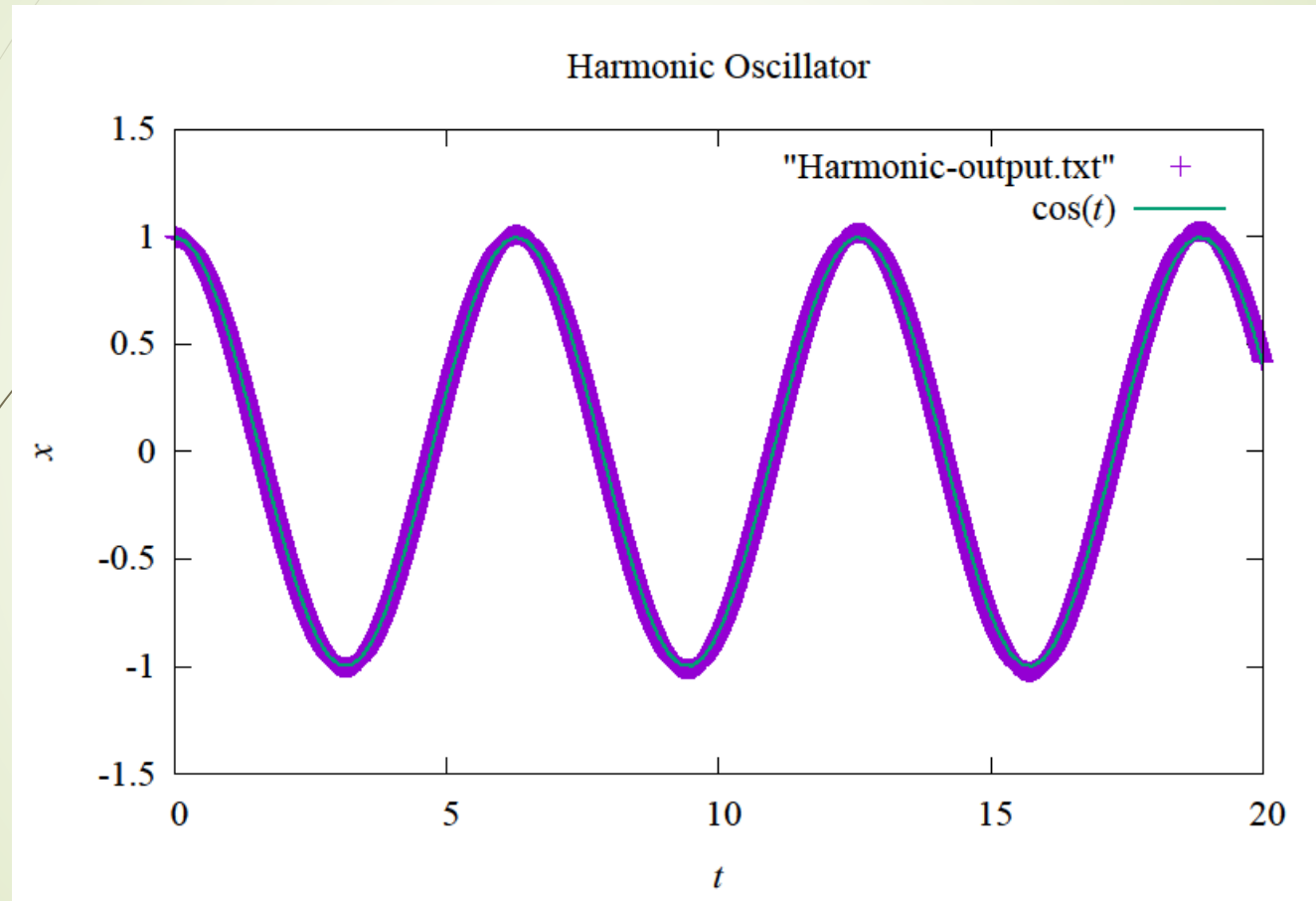
$$\frac{dx}{dt} = v$$

例：二階微分方程式から一階微分方程式へ：振動子

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$



$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x$$
$$\frac{dx}{dt} = v$$



厳密解が得られる場合には必ず比較すること

例：減衰振動

➡ 摩擦がある場合 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$

➡ 解を仮定

$$x(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\alpha t}$$

➡ エネルギーは保存しない

➡ 摩擦で散逸する

$$x(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\alpha t}$$

$$\frac{dx}{dt} = [(-\alpha A + \omega B) \cos \omega t + (-\omega A - \alpha B) \sin \omega t] e^{-\alpha t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & [(\alpha^2 A - \omega^2 A - 2\alpha\omega B) \cos \omega t \\ & + (2\alpha\omega A + \alpha^2 B - \omega^2 B) \sin \omega t] e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

➡ 運動方程式に代入

$$m(\alpha^2 A - \omega^2 A - 2\alpha\omega B) = -kA - \gamma(-\alpha A + \omega B)$$

$$m(2\alpha\omega A + \alpha^2 B - \omega^2 B) = -kB - \gamma(-\alpha B - \omega A)$$



$$m(\alpha^2 - \omega^2) = -k + \alpha\gamma$$

$$-2\alpha m = \gamma$$



$$\alpha = \frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(k - \frac{\gamma^2}{4m} \right)$$

➡ 境界条件： $x(0) = 0$ 及び $v(0) = 1$

$$x(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$v(0) = 1 \rightarrow -\alpha A + \omega B = 1 \rightarrow B = \omega^{-1}$$

$$x(t) = \omega^{-1} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

