学籍番号									氏名	

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「モデリングとシミュレーション」確認テスト

2020/12/7

問 1　正規分布は、定義域が $[-\infty, \infty)$ であり、平均を μ、標準偏差を σ とするときの確率密度が次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1}$$

対応する母関数は

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) z^x \mathrm{d}x = \exp\left[\mu \ln z + \frac{\sigma^2}{2} (\ln z)^2\right] \tag{2}$$

と得ることができる。この時 $G'(z)$ 及び $G'(1)$ を求めよ。また、それを用いて、x の平均を求めよ。

解答例　式 (2) の被積分関数は

$$f(x)z^x = \exp\left[x\ln z - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

である。指数関数の変数部分を x の完全平方と x を含まない部分の二つに分ける。

$$\begin{aligned}
x\ln z - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 + 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 x\ln z\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu+\sigma^2\ln z)x + (\mu+\sigma^2\ln z)^2 - 2\mu\sigma^2\ln z - \sigma^4(\ln z)^2\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu-\sigma^2\ln z\right)^2 + \mu\ln z + \frac{\sigma^2}{2}(\ln z)^2
\end{aligned}$$

x を含まない部分は積分の外に出すことができる。

$$\begin{aligned}
G(z) = \exp&\left[\mu\ln z + \frac{\sigma^2}{2}(\ln z)^2\right] \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu-\sigma^2\ln z\right)^2\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

積分部分は、x の原点をずらしているだけであるので、1 となり

$$G(z) = \exp\left[\mu\ln z + \frac{\sigma^2}{2}(\ln z)^2\right]$$

を得る。

　母関数 $G(z)$ の具体的表式が分かったので、これを用いて平均と標準偏差を求めることができる。そのため、母関数 $G(z)$ の一階微分と二階微分を計算する。

$$\begin{aligned}
G'(z) &= \left(\frac{\mu}{z} + \sigma^2\frac{\ln z}{z}\right)G(z) \\
G''(z) &= \left(-\frac{\mu}{z^2} - \sigma^2\frac{\ln z}{z^2} + \sigma^2\frac{1}{z^2}\right)G(z) + \left(\frac{\mu}{z} + \sigma^2\frac{\ln z}{z}\right)^2 G(z)
\end{aligned}$$

$$G'(1) = \mu \qquad G''(1) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu$$

　以上から平均と分散を計算することとする。

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= G'(1) = \mu \\
\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 &= G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \mu + \mu - \mu^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$