学籍番号									氏名	

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「モデリングとシミュレーション」確認テスト

2021/1/7

問 1　平均場伝染病モデルは、状態 S、I、R のそれぞれの個体の密度 $S(t)$、$I(t)$ 及び $R(t)$ に対する時間発展方程式

$$S(t+1) = S(t) - \beta q(t) S(t) \tag{1}$$
$$I(t+1) = I(t) + \beta q(t) S(t) - \gamma I(t) \tag{2}$$
$$R(t+1) = R(t) + \gamma I(t) \tag{3}$$

と表される。β と γ は感染と治癒を表すパラメタである。

$q(t)$ は、一つの個体の周囲に一つ以上の状態 I の個体が居る確率を表す。一つの個体に最大 z 個の個体が隣接できるとすると、

$$q(t) = 1 - (1 - I(t))^z \tag{4}$$

である。$I(t) \ll 1$ として、式 (4) を $I(t)$ の二次まで展開しなさい。

解答例　ここでは、二項展開を用いて示す。

$$\begin{aligned}
q(t) &= 1 - (1 - I(t))^z \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{z} \binom{z}{k} (-I(t))^k \\
&= 1 - \binom{z}{0} (-I(t))^0 - \binom{z}{1} (-I(t))^1 - \binom{z}{2} (-I(t))^2 + O\left(I(t)^3\right) \\
&= 1 - 1 + zI(t) - \frac{z(z-1)}{2} I(t)^2 + O\left(I(t)^3\right) \\
&= zI(t) - \frac{z(z-1)}{2} I(t)^2 + O\left(I(t)^3\right)
\end{aligned}$$

もちろん、$q(t)$ を $I(t)$ の「関数」と見て、$I(t) = 0$ から Taylor 展開してもよい。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}I(t)} &= z\left(1 - I(t)\right)^{z-1} \\
\frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}I(t)^2} &= -z(z-1)\left(1 - I(t)\right)^{z-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left. q(t) \right|_{I(t)=0} &= 0 \\
\left. \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}I(t)} \right|_{I(t)=0} &= z \\
\left. \frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}I(t)^2} \right|_{I(t)=0} &= -z\left(z-1\right)
\end{aligned}
$$

以上より、以下を得る。

$$
q(t) = zI(t) - \frac{z\left(z-1\right)}{2} I(t)^2 + O\left(I(t)^3\right)
$$