微分方程式：相互作用する振動子

モデリングとシミュレーション特論

2019年度

只木進一

同期現象の例
Examples of synchronization

- 蛍の同期発光：fireflies
  - https://www.youtube.com/watch?v=WMIXp8H8364
- メトロノームの同期：metronomes
  - https://www.youtube.com/watch?v=JWToUATLGzs

相互作用する調和振動
Coupled harmonic oscillators

- n個の固有振動数が異なる振動子が相互作用

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = -k_i x_i - \sum_j \lambda_{ij} \left(x_i - x_j \right)$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$$

- 変位x_iの差が小さくなるように力が働く
  - The interaction reduces differences in displacements x_i.

エネルギー

- ポテンシャルエネルギー

$$U = \frac{1}{2}\sum_i k_i x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \lambda_{ij} \left(x_i - x_j \right)^2$$

- 運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \right)^2$$

エネルギー保存

$$E = U + T$$

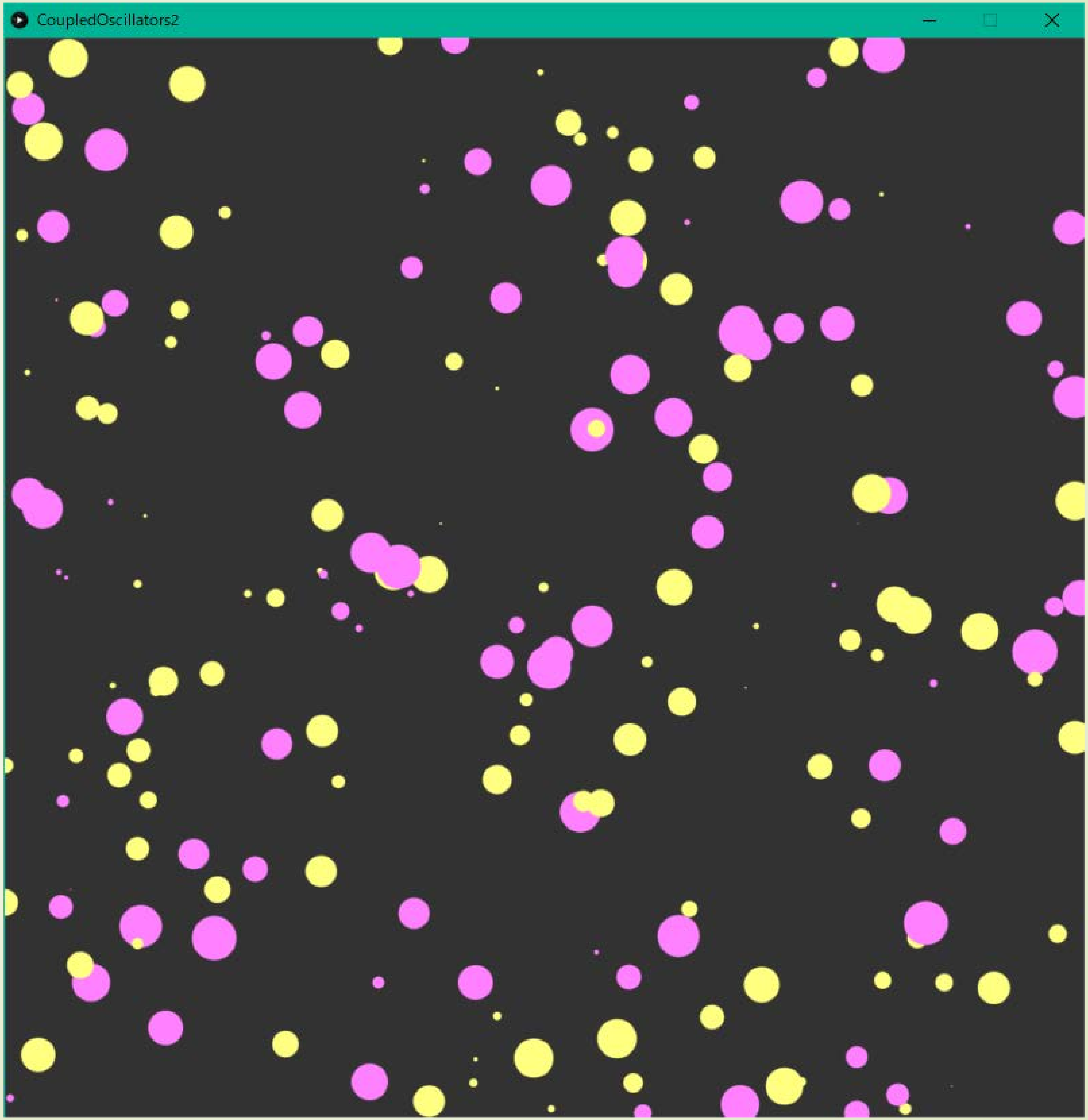
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum_i k_i x_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right) + \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)\left(x_i - x_j\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}\right) + k_i x_i + \sum_j \lambda_{ij}\left(x_i - x_j\right)\right] = 0$$

何が起きるか

- 振動子間に同期が起こる
- 振幅を表示する動画を作って確認
  - DifferentialEquations/coupledOscillators2/CoupledOscillators2.java
  - DifferentialEquations/CoupledOscillators2/CoupledOscillators2.pde


CoupledOscillators2

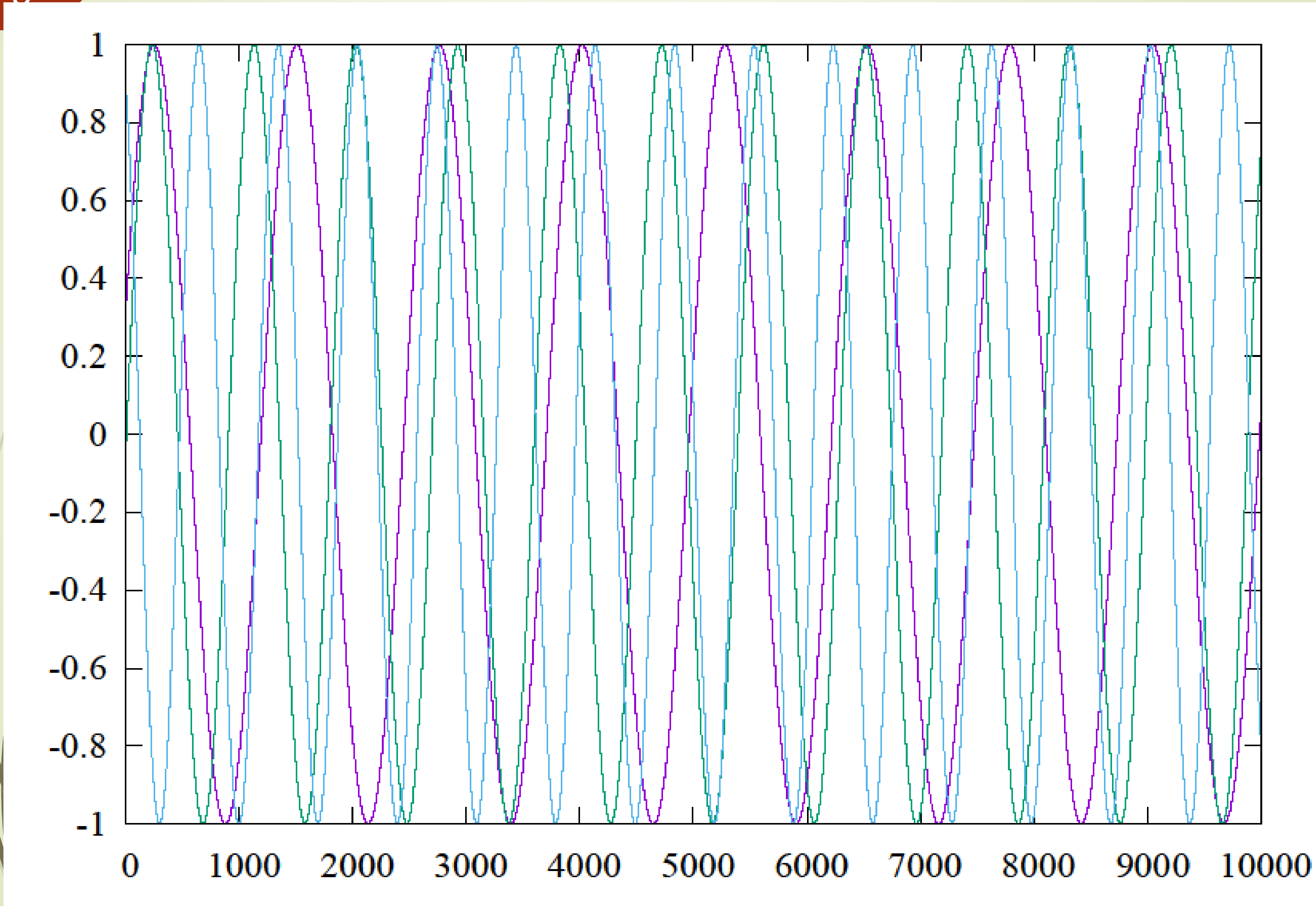
Kuramoto Model

- 同期現象をさらに調べるために
- 引き込み現象の基本モデル
  - N個の振動子が位相差を通じて相互作用

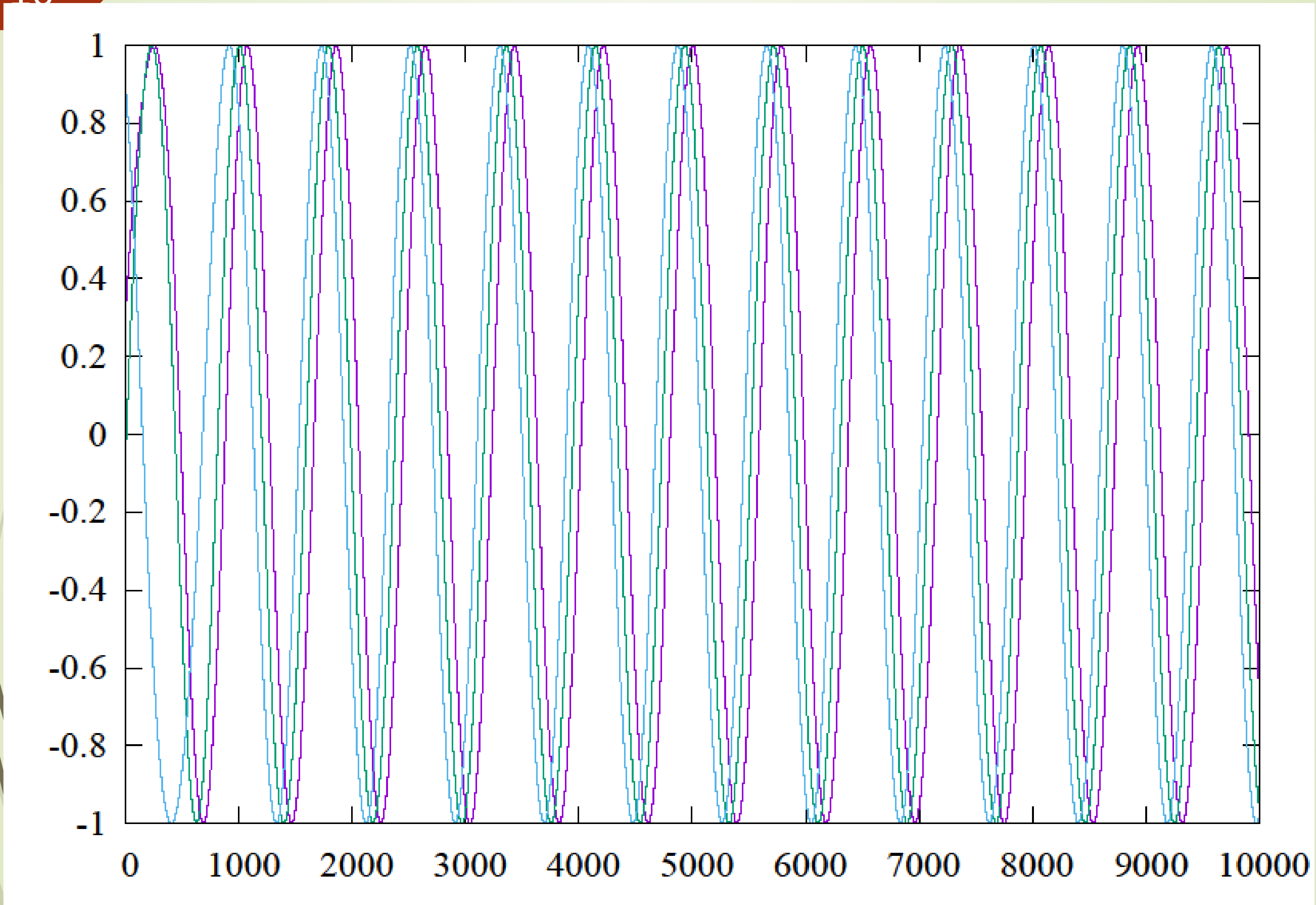
$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{k}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sin\left(\theta_j - \theta_i\right)$$

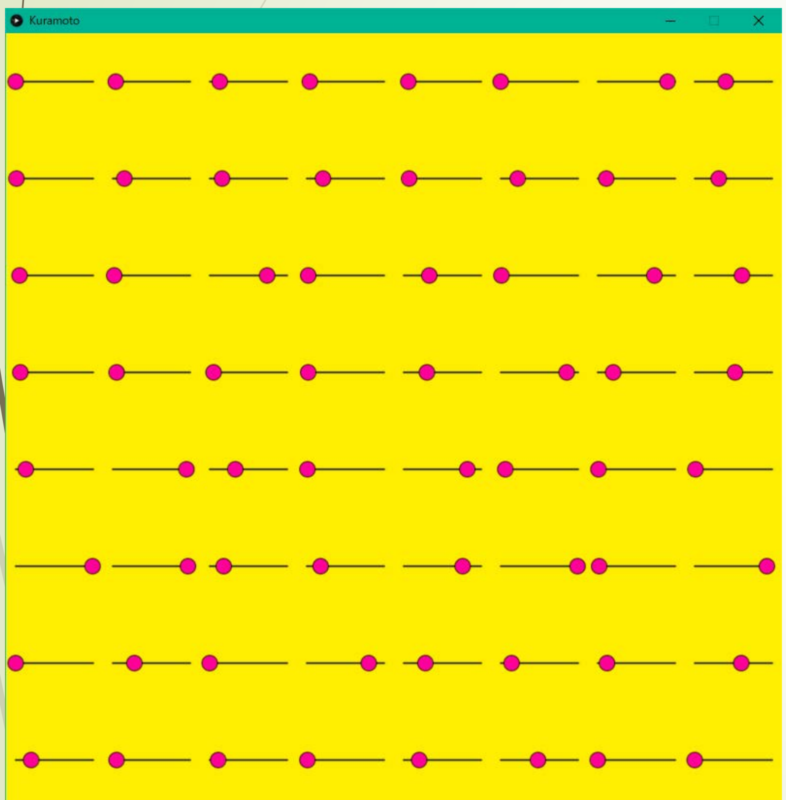
  - DifferentialEquations/kuramoto/Kuramoto.java

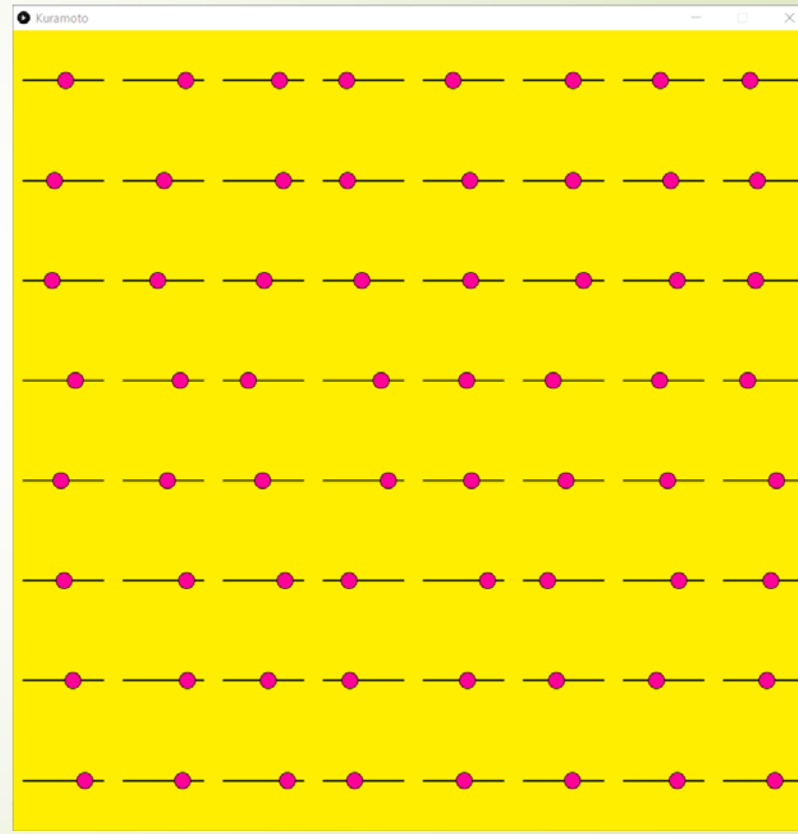
$$k = 0$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

$k = 5$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


Kuramoto


Kuramoto