微分方程式：強制振動

モデリングとシミュレーション特論

2019年度

只木進一

連立常微分方程式の数値解法

Numerical method for solving ordinary differential equations

- 今日のサンプルプログラム
  - https://github.com/modeling-and-simulation-mc-saga/DifferentialEquations
- Runge-Kutta法
  - t ：独立変数(independent variable)
  - $\vec{y}$: 従属変数(dependent variable) 。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = \vec{f}\left(t, \vec{y}\right)$$

- Runge-Kutta法
- 数値解 (numerical solutions)
  - tをh刻みで増加させ、従属変数の列を得る

$$\left(t_n, \vec{y}_n\right) \to \left(t_{n+1} = t_n + h, \vec{y}_{n+1}\right)$$

4次のRunge-Kutta法

$$\vec{k}_1 = h\vec{f}\left(t_n, \vec{y}_n\right)$$

$$\vec{k}_2 = h\vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{2}\right)$$

$$\vec{k}_3 = h\vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_2}{2}\right)$$

$$\vec{k}_4 = h\vec{f}\left(t_n + h, \vec{y}_n + \vec{k}_3\right)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{6} + \frac{\vec{k}_2}{3} + \frac{\vec{k}_3}{3} + \frac{\vec{k}_4}{6} + O\left(h^5\right)$$

Javaで連立微分方程式を扱う

- Runge-Kutta法
  - ある時刻tにおける従属変数$\vec{y}(t)$と連立微分方程式$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y})$から
  - 次の時刻$t + h$の従属変数$\vec{y}(t + h)$を得る
- 副プログラム (subroutine) に相当
  - 他に影響を与えない
  - static methodに相当

methodに関数を引数として渡す方法

- java は関数ポインタを持たない
- 関数はmethod単体
- インターフェースのインスタンス (an instance of an interface)として関数に渡す
  - インターフェースのインスタンスは作れないはず

インターフェースのインスタンス

- java.util.function.DoubleFunction<R>を例に
  - 匿名クラス (anonymous classes)の利用
    - interfaceExample/UseAnonymousClass.java
  - Lambda式の利用
    - 関数インターフェースの場合
    - interfaceExample/UseLambda.java

myLib.rungeKuttaの中

- DifferentialEquation.java
  - インターフェースの定義
  - 微分方程式の右辺
- RungeKutta.java
  - Runge-Kutta法の実装
  - 一時間ステップhだけ進める
  - ある時間をステップ数で区切って進める

例題：調和振動＋外力

- 調和振動

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

- 連立方程式へ

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}x$$

外力下の調和振動

- 調和振動子に時間とともに変動する外力$F(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x + \frac{1}{m} F(t)$$

- 特に関心があるのは外力も周期的である場合：$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta)$

非斉次線形微分方程式の解

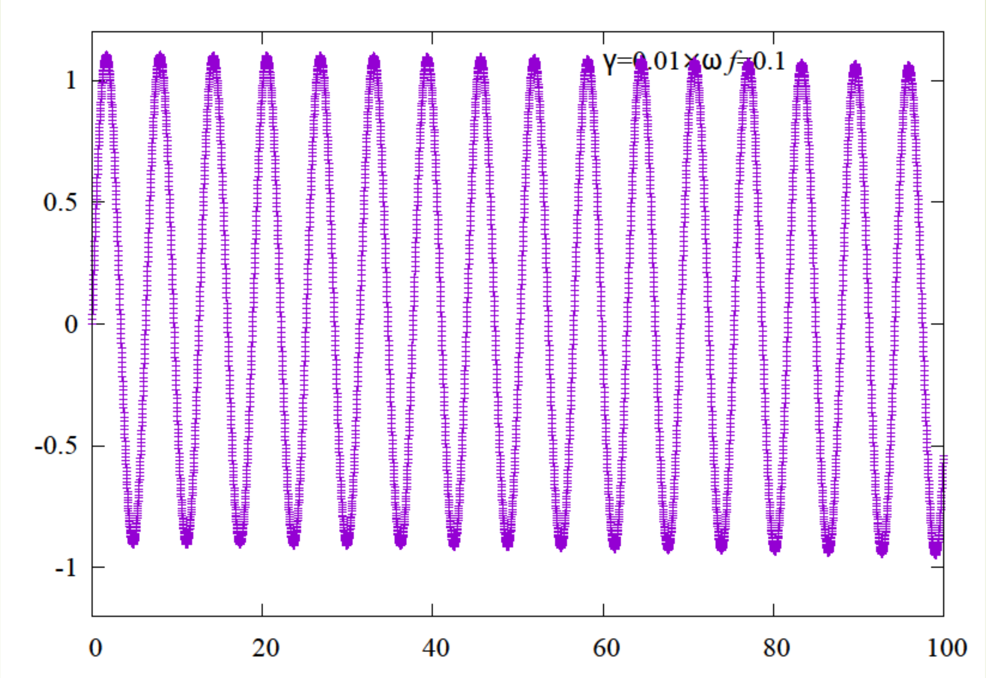
- 特殊解を探す
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x + \frac{1}{m} F(t)$$
- $x_1 = B\cos(\gamma t + \beta)$として、方程式に代入

$$-\gamma^2 B\cos(\gamma t + \beta) = -\omega^2 B\cos(\gamma t + \beta) + \frac{1}{m} f\cos(\gamma t + \beta)$$

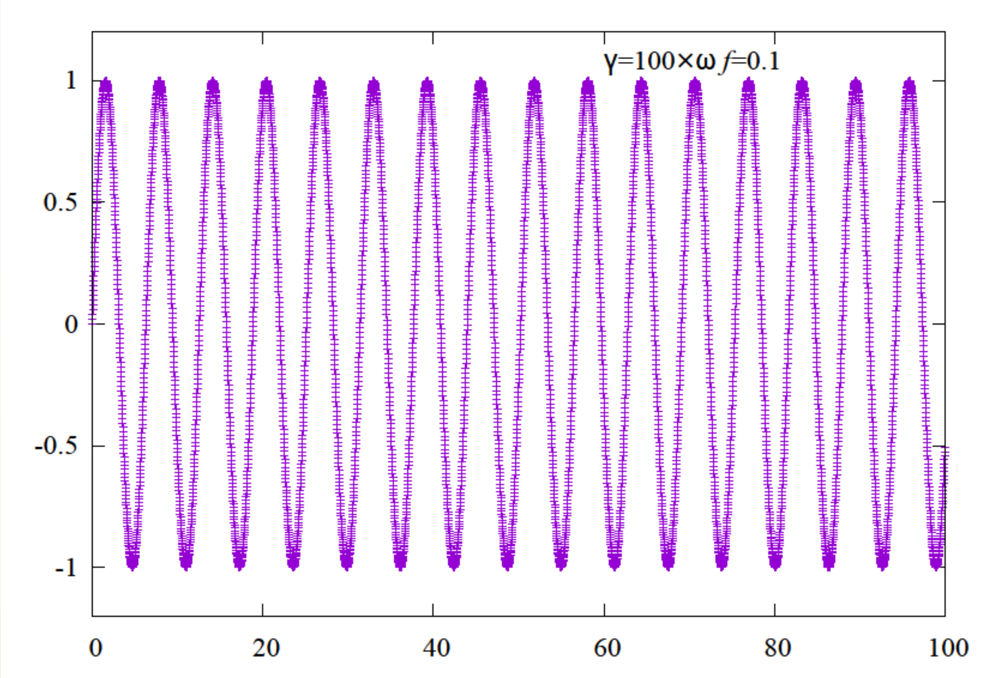
- 特殊解を得る
  - $x_1 = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta)$

- 一般解は、斉次方程式の一般解との和

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \alpha\right) + \frac{f}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)}\cos\left(\gamma t + \beta\right)$$


γ=0.01×ω f=0.1
1
0.5
0
-0.5
-1
0
20
40
60
80
100

遅い外力


γ=100×ω f=0.1
1
0.5
0
-0.5
-1
0
20
40
60
80
100

速い外力

- 一般解を適当に係数を変更して

$$x(t) = A'\cos\left(\omega t + \alpha'\right)$$

$$+\frac{f}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)}\left(\cos\left(\gamma t + \beta\right) - \cos\left(\omega t + \beta\right)\right)$$

- $\gamma = \omega + \epsilon$と置くと

$$\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta) = -t\epsilon \sin(\omega t + \beta)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} = -\frac{1}{2\omega\epsilon}\left(1 + O(\epsilon)\right)$$

- 共鳴($\epsilon = 0$)時には、振幅が線形に増加：l’Hôpitalの定理の例

$$x(t) = A'\cos(\omega t + \alpha') + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta) + O(\epsilon)$$

うなり状態