



1

Network

モデリングとシミュレーション特論

2019年度

只木進一

グラフ・ネットワーク

Graphs and Networks

- 要素が結ばれたものの総称
 - 頂点(node)と弧(edge)
- グラフ理論ではグラフとネットワークを区別
 - ネットワーク：弧に値がついているもの

様々なネットワーク

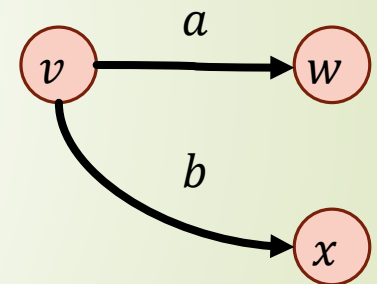
Various Networks

- The Internet
- 交通網：道路、鉄道、航空、etc.
- 人の繋がり
- 食物連鎖

グラフ・ネットワークの定義

Defining graphs/networks

- 頂点の集合 V 、弧の集合 A
- 弧から頂点への写像
 - $\partial^+ : A \rightarrow V$: 始点
 - $\partial^- : A \rightarrow V$: 終点
- 頂点から弧
 - $\delta^+ : V \rightarrow 2^A$: 始点
- 弧から値 (ネットワーク)
 - $w : A \rightarrow R$



$$\partial^+ a = v, \quad \partial^- a = w$$

$$\delta^+ v = \{a, b\}$$

グラフ・ネットワークのクラス

Network classes

- ▶ <https://github.com/modeling-and-simulation-mc-saga/Network>
- ▶ networkパッケージ
 - ▶ Edgeクラス
 - ▶ Nodeクラス
 - ▶ AbstractNetworkクラス
- ▶ AbstractNetwork.main()がサンプル

グラフアルゴリズム

Graph Algorithms

- ➡ グラフの探索等のアルゴリズム総称
- ➡ 例：幅優先探索

L : すでにチェックした
点のリスト: 初期 $L = \phi$
 Q : 調査すべき点の
キュー: 初期 $Q = [r]$

```
L =  $\phi$ 
Q = [r]
while(Q  $\neq \phi$ ) {
    v = Q.poke//先頭
    forall( a  $\in \delta^+v$  ) {
        w =  $\delta^-a$ 
        if( w  $\notin L$  && w  $\notin Q$  ) {
            Q  $\leftarrow$  w
        }
    }
    L  $\leftarrow$  L  $\cup$  {v}
}
```

- ▶ graphAlgorithmsパッケージ
 - ▶ AbstractSearchクラス
 - ▶ BreadthFirstSearchクラス
 - ▶ ほぼ、アルゴリズム通り

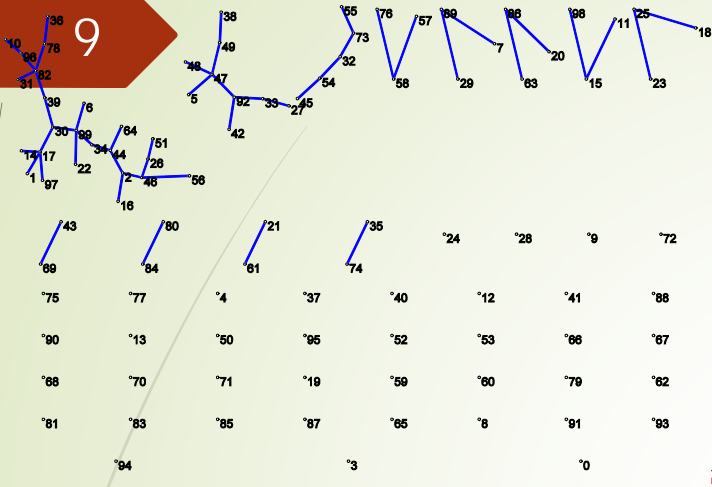
Erdős-Rényi Random Graph

- ▶ 一定数 N の節を用意する
- ▶ 一定数 L の弧をランダムに選んだ節の組に接続する

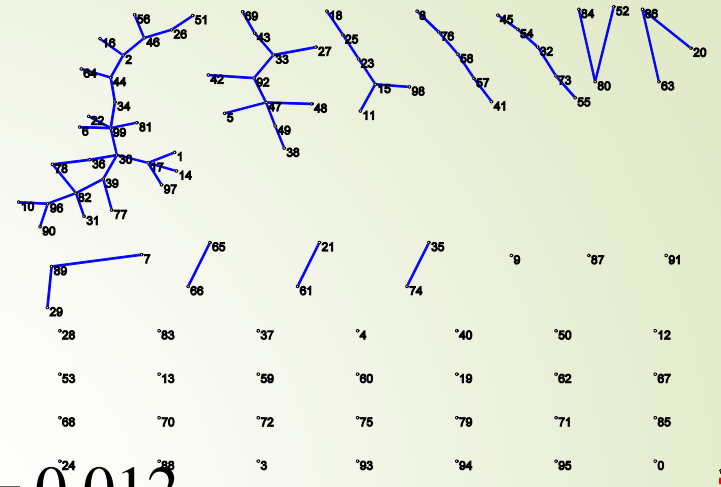
$$L = p \frac{N(N-1)}{2}$$

- ▶ 単純グラフであることは求めない
 - ▶ 頂点 v から頂点 v への弧：孤立弧
 - ▶ 頂点 v から頂点 w への弧が複数：並列弧

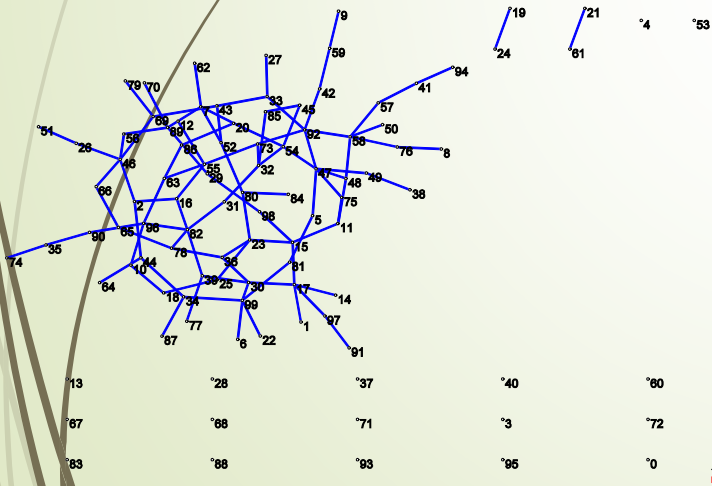
$N = 100$



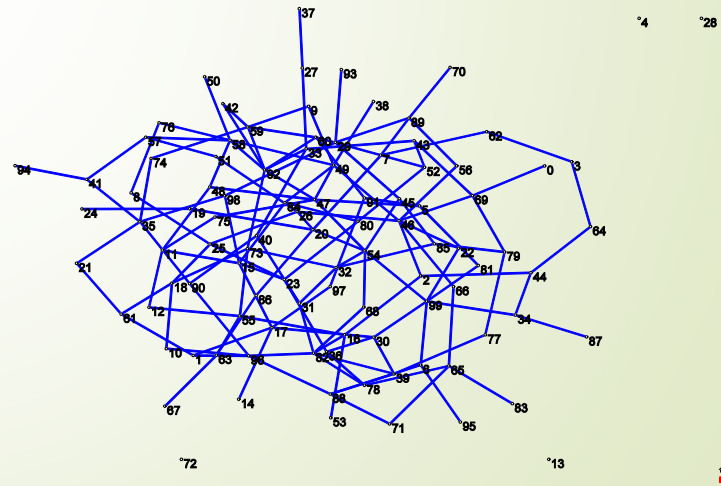
$p = 0.01$



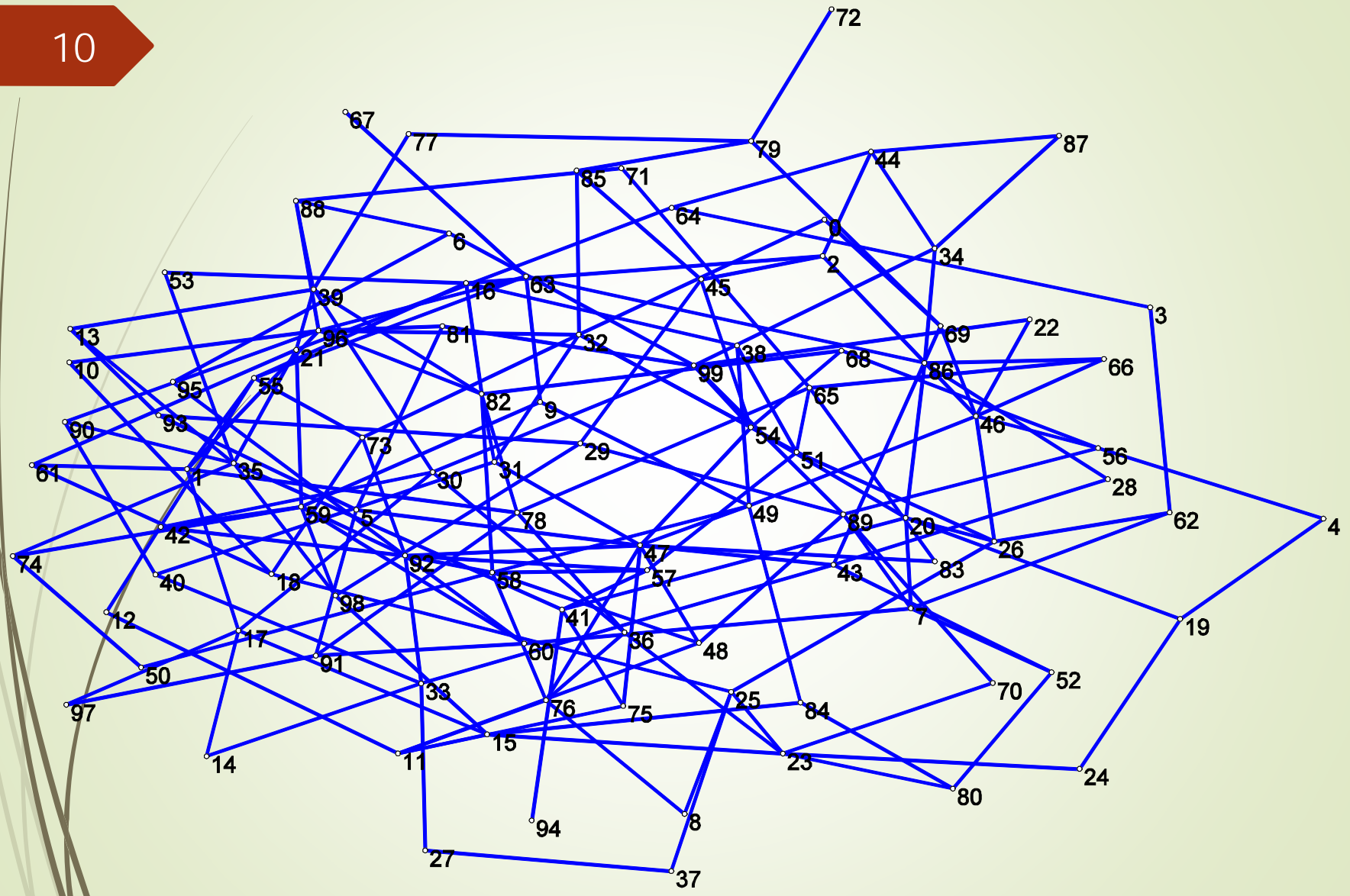
$p = 0.012$



$p = 0.02$



$p = 0.03$



$p = 0.04$

Giant Component

- ▶ 辺を持つ確率 p が小さい
 - ▶ 連結されていない小さいネットワークに分かれている
 - ▶ 平均距離は短い:連結の場合だけを考える
- ▶ 辺を持つ確率 p が非常に大きい
 - ▶ 全体が連結されている
 - ▶ 多くの頂点と直接結ばれている:平均距離は短い
- ▶ 中間の p で何が起こる?
- ▶ 全頂点とほぼ同じサイズの連結成分をgiant componentと呼ぶ

- ▶ 任意の頂点がgiant componentに属していない確率 u
- ▶ 節 i と j を考える
 - ▶ 節 i と j が繋がっていない確率： $1 - p$
 - ▶ 節 i と j が節 j を通じてgiant componentに繋がっていない確率： pu

$$u = (1 - p + pu)^{N-1} = \left[1 - \frac{c}{N-1} (1-u) \right]^{N-1}$$

$$c \equiv (N-1)p$$

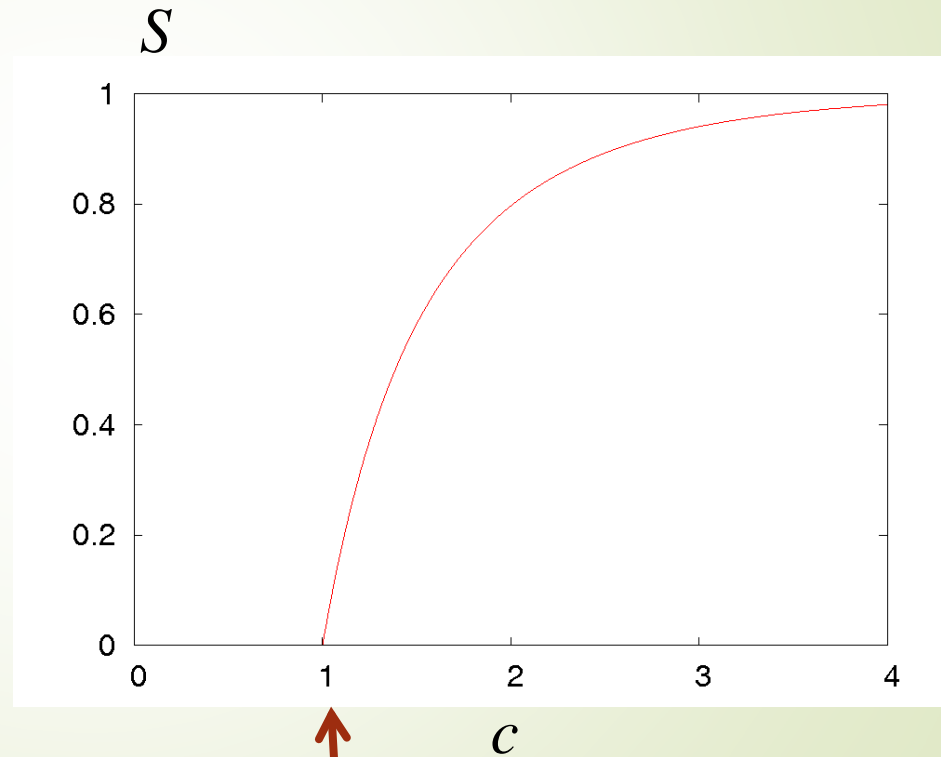
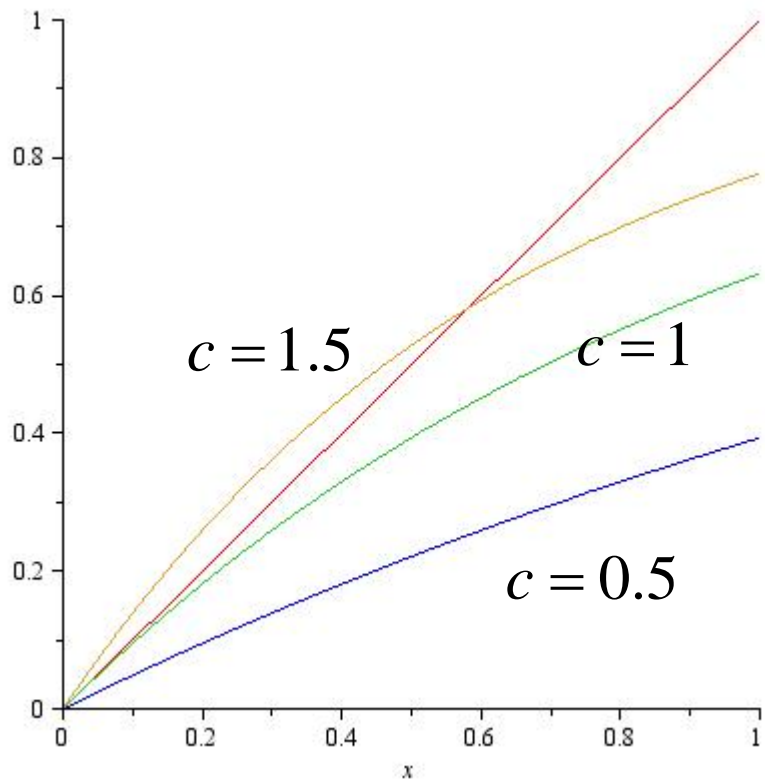
$$\begin{aligned}\ln u &= (N-1) \ln \left[1 - \frac{c}{N-1} (1-u) \right] \\ &\simeq (N-1) \left[-\frac{c}{N-1} (1-u) + O\left((N-1)^2\right) \right] = -c(1-u) \\ u &= e^{-c(1-u)}\end{aligned}$$

- ▶ Giant componentに入っている節の比 : $S = 1 - u$

$$S = 1 - e^{-cS}$$

- ▶ S に対する方程式に対して、自己無撞着(self-consistent)に数値的解を得る

$c > 1$ で曲線と直線の交点が発生



突然giant componentが出現

Simulation

- ▶ 頂点を連結した頂点の集合に分類する
- ▶ 一番大きな集合のサイズが p に対して変化する様子を調べる

- ▶ analysis/GiantClusterクラス
- ▶ analysisSamples/ERGiantClusterクラス

頂点を連結集合（クラスタ）へ 分割：幅優先探索の応用

- $U \subseteq V$: 未分類の頂点の集合。初期値は $U = V$
- $C \subseteq 2^V$: クラスタの集合。初期値は $C = \emptyset$


```
while ( $U \neq \emptyset$ ){  
     $w \in U$  //  $U$ から選ぶ  
     $L = \text{BSF}(U, w)$  //  $w$ から到達可能な頂点の集合  
     $U \leftarrow U \setminus L$  //  $U$ から $L$ の要素を削除  
     $C \leftarrow C \cup \{L\}$   
}
```

頂点数1000

Giant Cluster

