酔歩と中心極限定理

モデリングとシミュレーション特論

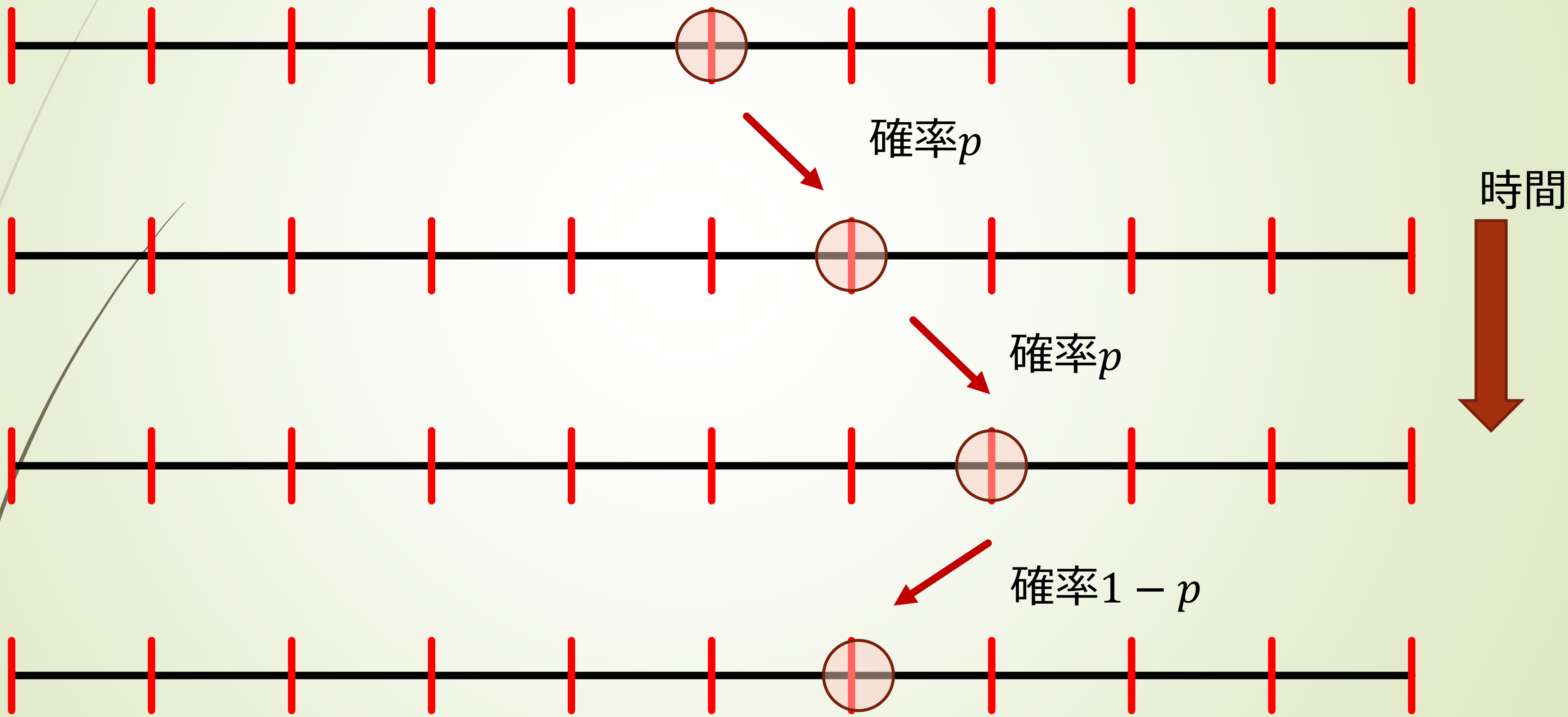
2019年度

只木進一

確率過程 Stochastic Process

- 確率過程：系の時間発展が非決定的
  - 確率的に時間発展する
- 酔歩 (random walk)
  - 確率過程の標準モデル
  - 一次元格子
  - 各時刻で、確率p で右に、$1-p$ で左に移動

酔歩：イメージ
Image of random walk



理論的解析
Theoretical analysis

- 原点から出発した粒子の位置x
- 時刻t で位置x に至るためには$m = (t + x)/2$回右に移動
  - 左右の移動順序の可能な組み合わせの数に注意
- 時刻t で位置x に至る確率
  - 二項分布 (binomial distribution)

$$P(x) = \binom{t}{\frac{t+x}{2}} p^{(t+x)/2} q^{(t-x)/2}, \ q = 1 - p$$

確率母関数を使う
Using generating function

- xに対する確率からmに対する確率へ

$$P(x): x = 2m - t, m \in [0,t]$$
$$\Downarrow$$
$$Q(m): m = \frac{x+t}{2}, m \in [0,t]$$

- 対応する確率母関数

$$G(z) = \sum_{m=0}^{t} Q(m) z^m$$

確率母関数：一般論：復習
Probability generating functions

$$G(1)=\sum_{m=0}^{t}Q(m)=1$$

$$G'(z)=\sum_{m=1}^{t}mQ(m)z^{m-1}$$

$$G'(1)=\sum_{x=0}^{t}mQ(m)=\langle m\rangle$$

$$G''(z)=\sum_{m=2}^{t}m(m-1)Q(m)z^{m-2}$$

$$G''(1)=\sum_{m=0}^{t}m(m-1)Q(m)=\langle m^2\rangle-\langle m\rangle$$

二項分布 $Q(m)=\binom{t}{m}p^m q^{t-m}$ に対して：復習

$$G(z)=\sum_{m=0}^{t}\binom{t}{m}p^m q^{t-m} z^m=(zp+q)^t$$

$$G(1)=1$$

$$G'(z)=tp(zp+q)^{t-1}$$

$$G'(1)=tp$$

$$\langle m\rangle = tp$$

$$\langle x\rangle=\langle 2m-t\rangle=2tp-t=t(2p-1)$$

$$G''(z) = t(t-1)p^2(zp+q)^{t-2}$$

$$G''(1) = \langle m^2\rangle - \langle m\rangle = t(t-1)p^2$$

$$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \langle 4m^2 - 4mt + t^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

$$= 4\left(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle\right) + 4\langle m\rangle(1-t) + t^2 - \langle x\rangle^2$$

$$= 4G''(1) + 4\langle m\rangle(1-t) + t^2 - \langle x\rangle^2$$

$$= 4tp^2(t-1) + 4tp(1-t) + t^2 - t^2\left(4p^2 - 4p + 1\right)$$

$$\boxed{= 4tp(1-p)}$$

位置の分布の近似

- 中心付近の分布

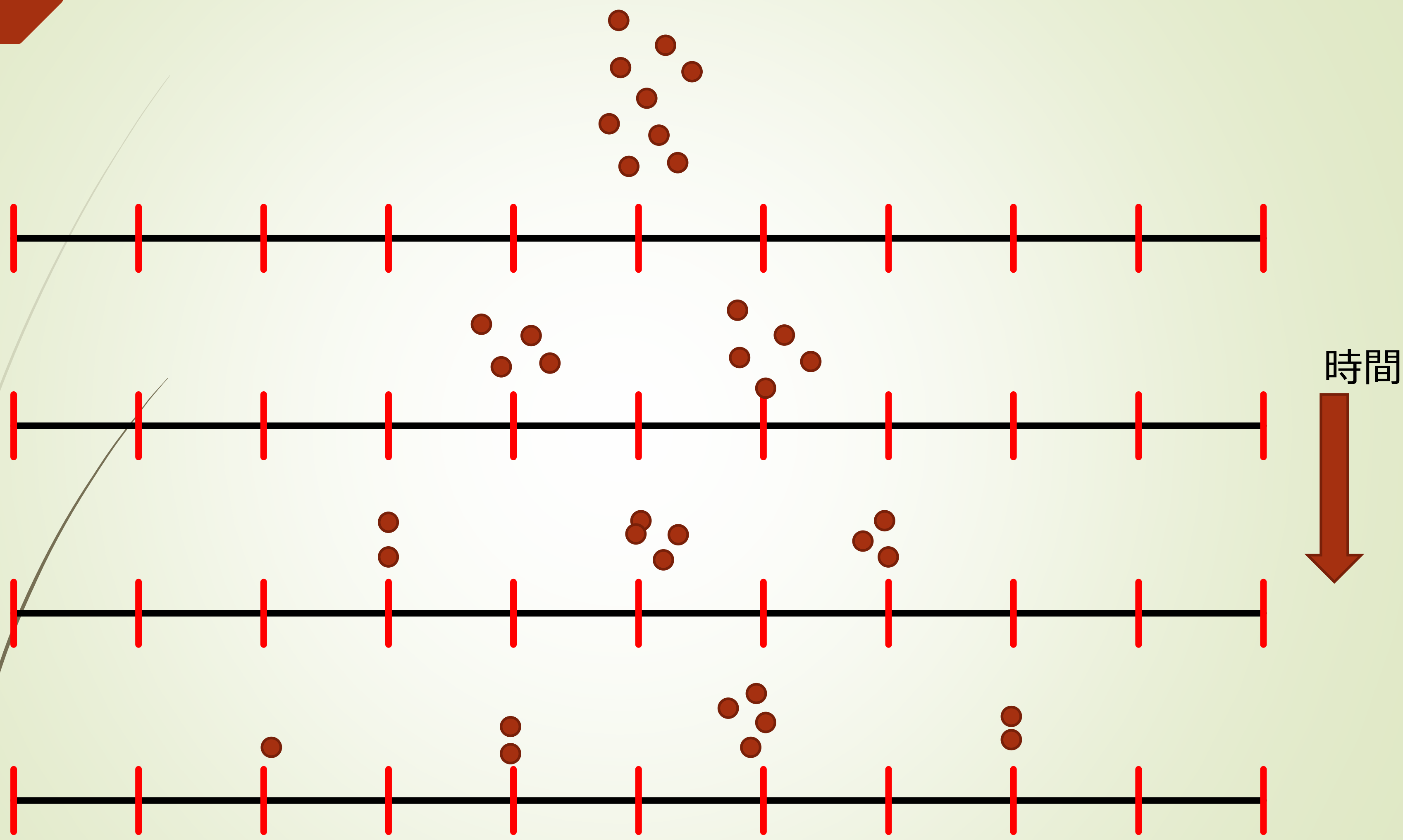
$$\boxed{P(x) \propto \exp\left[-\frac{\left(x-\langle x\rangle\right)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$\sigma^2 = 4tp(1-p)$$

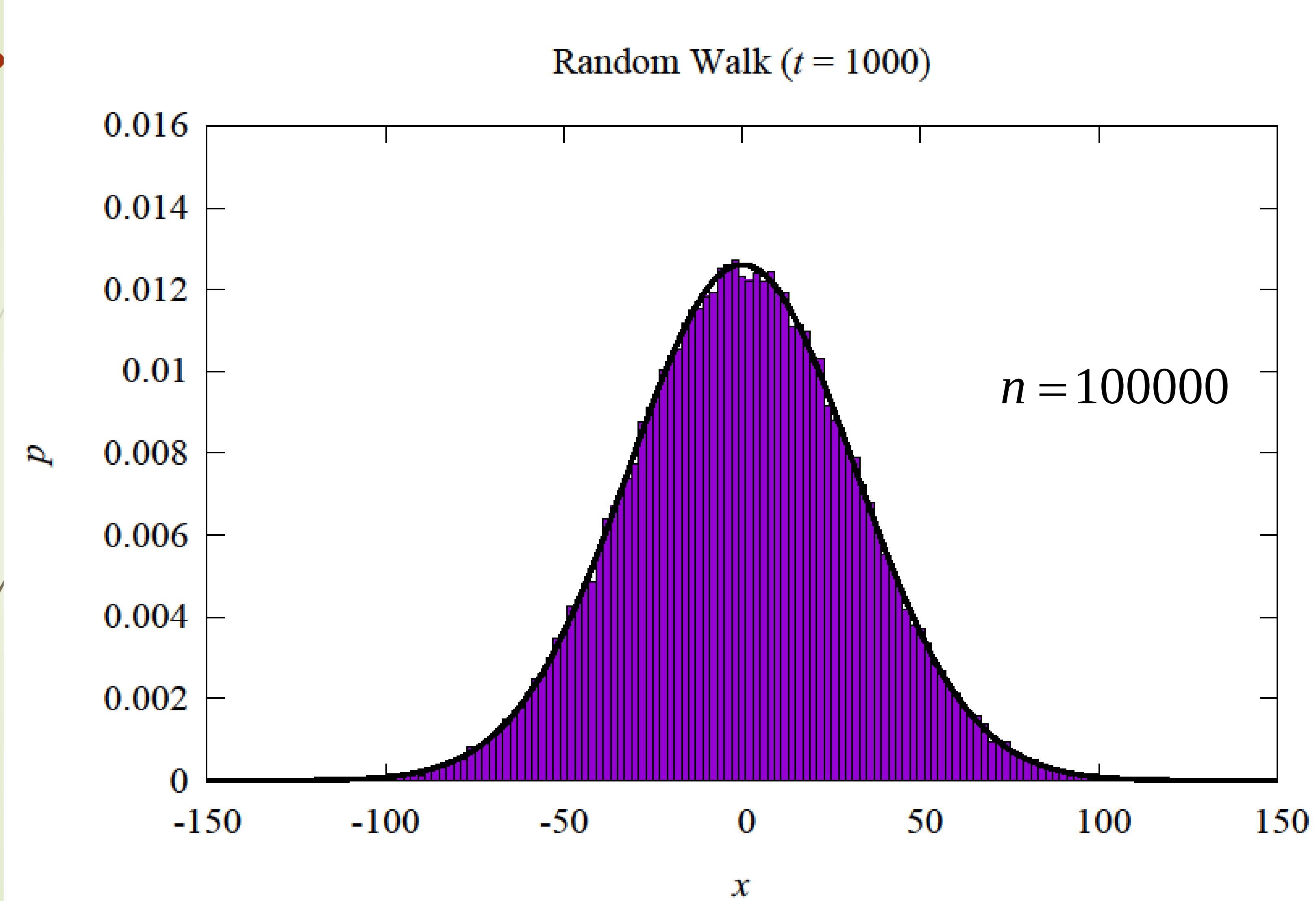
正規分布

正規分布になるのは一般的なのか？

酔歩シミュレーションイメージ



各walkerは独立に移動


Random Walk (t = 1000)
$n = 100000$
p
x
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
-150
-100
-50
0
50
100
150

一次元酔歩の別の見方

Another view to random walk

- 確率$p(x)$に従う確率変数の列$\{X_k\}$

$$p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = -1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S_0 = 0$$

$$S_n = S_{n-1} + X_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

- S_nは、時刻nにおける一つのwalkerの位置
- S_nの分布は、時刻nにおけるwalkerの位置の分布

一次元酔歩の拡張 Extended random walk

- 確率密度$f(x)$に従う確率変数の列$\{X_k\}$

$$S_0 = 0$$

$$S_n = S_{n-1} + X_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

- 連続的位置をとることに注意

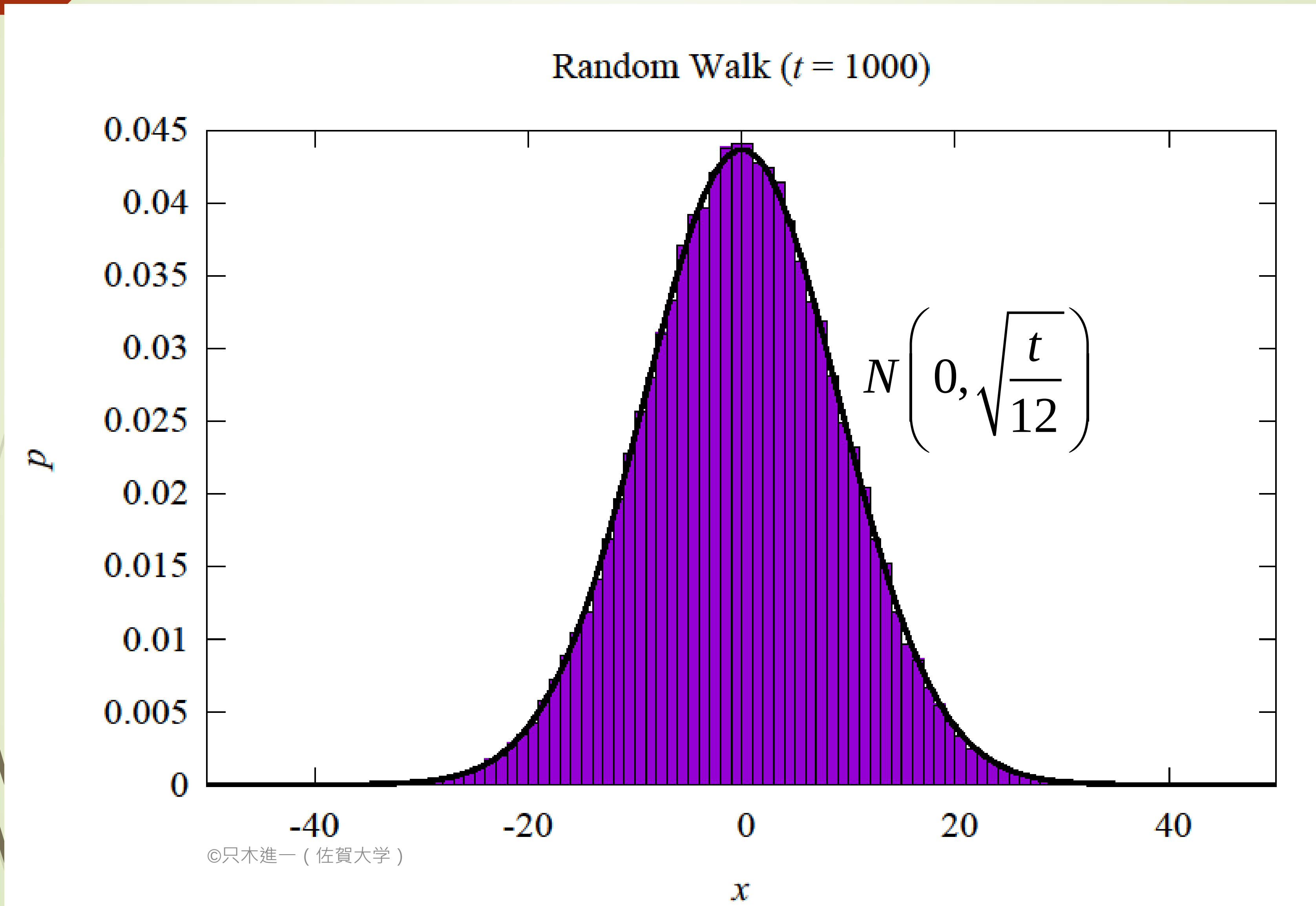
一次元酔歩の拡張
簡単な例：一様分布

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\langle x\rangle=\int_{-1/2}^{1/2}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1/2}^{1/2}x\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1/2}^{1/2}=0$$

$$\langle x^2\rangle=\int_{-1/2}^{1/2}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1/2}^{1/2}x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{12}$$

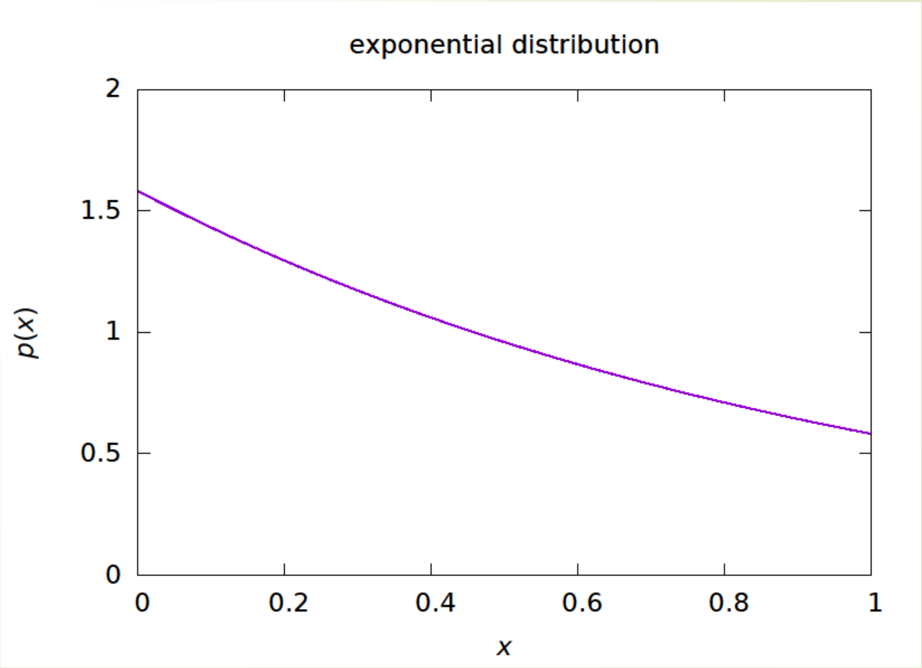
$$\sigma^2=\frac{1}{12}$$


Random Walk (t = 1000)
0.045
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
p
-40
-20
0
20
40
x
$N\left(0, \sqrt{\frac{t}{12}}\right)$
©只木進一（佐賀大学）

一次元酔歩の拡張
簡単な例2：指数分布

$$f\left(x\right)=Ae^{-x},\ (0\leq x<1)$$

$$A=\frac{e}{e-1}$$



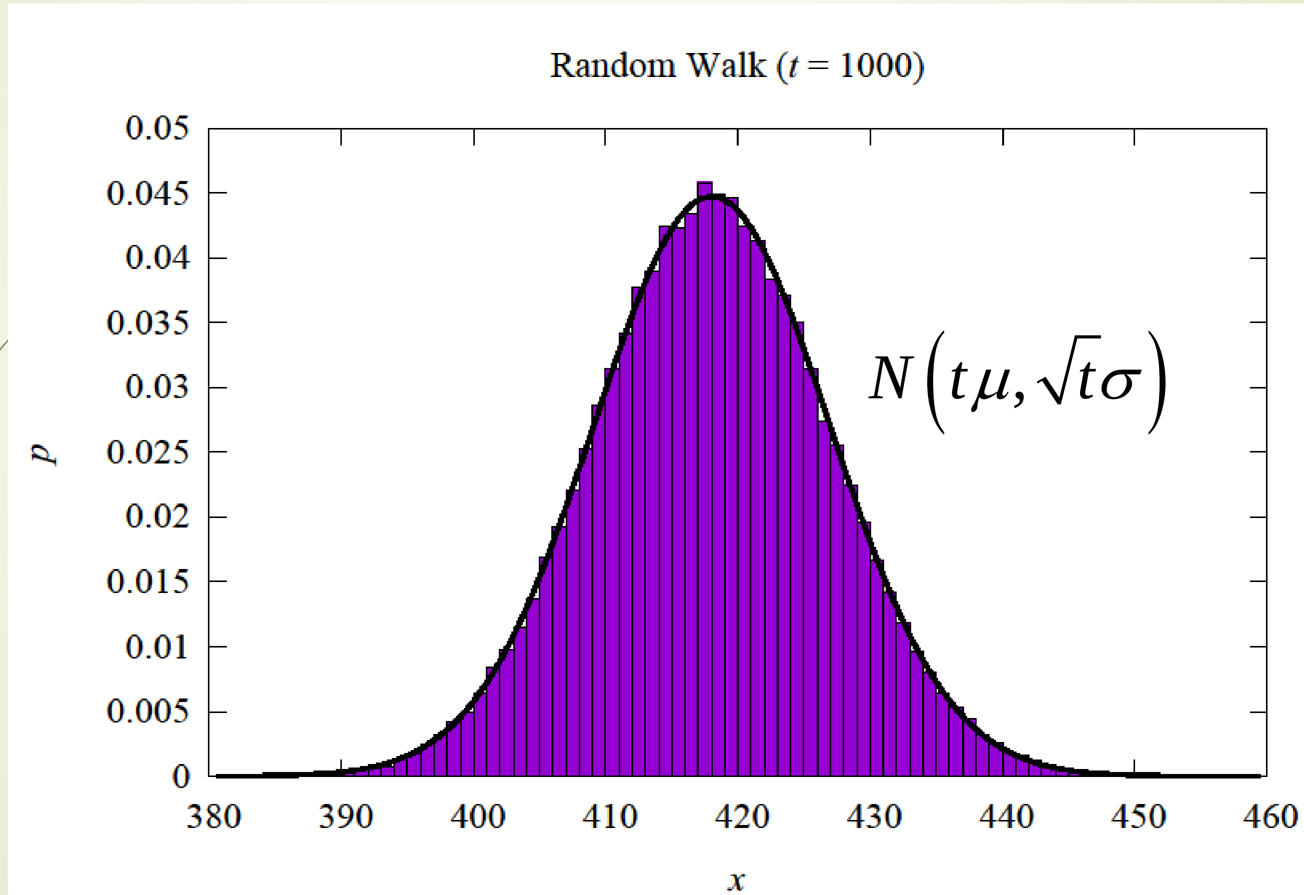
$$\langle x \rangle = \int_0^1 Axe^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 Ae^{-x}\mathrm{d}x - A\left[xe^{-x}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{e}{e-1}e^{-1} = \frac{e-2}{e-1}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^1 Ax^2e^{-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 Axe^{-x}\mathrm{d}x - A\left[x^2e^{-x}\right]_0^1$$

$$= 2\frac{e-2}{e-1} - \frac{e}{e-1}e^{-1} = \frac{2e-5}{e-1}$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{e^2-3e+1}{(e-1)^2}$$


Random Walk (t = 1000)
0.05
0.045
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
p
380
390
400
410
420
430
440
450
460
x
$N\left(t\mu, \sqrt{t}\sigma\right)$

中心極限定理 Central limiting theorem

- $\{X_k\}$を、平均μ、分散σ^2の同一分布に従う独立な確率変数とする

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$S_n{}^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_n^* \le a^*\right) = \int_{-\infty}^{a^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x$$

- つまり、nが十分大きいとき、S_n^*は標準正規分布$N(0,1)$