Barabási-Albert Model

Scale-free Network

- 現実のネットワークの次数分布
  - べき則に従う
- べき則(power-law) $P(k) \sim k^{-\alpha}$
  - 特徴的長さ(scale)が無い:scale-free
  - 長さの単位を変えても同じ
  - Invariant under scale transformation

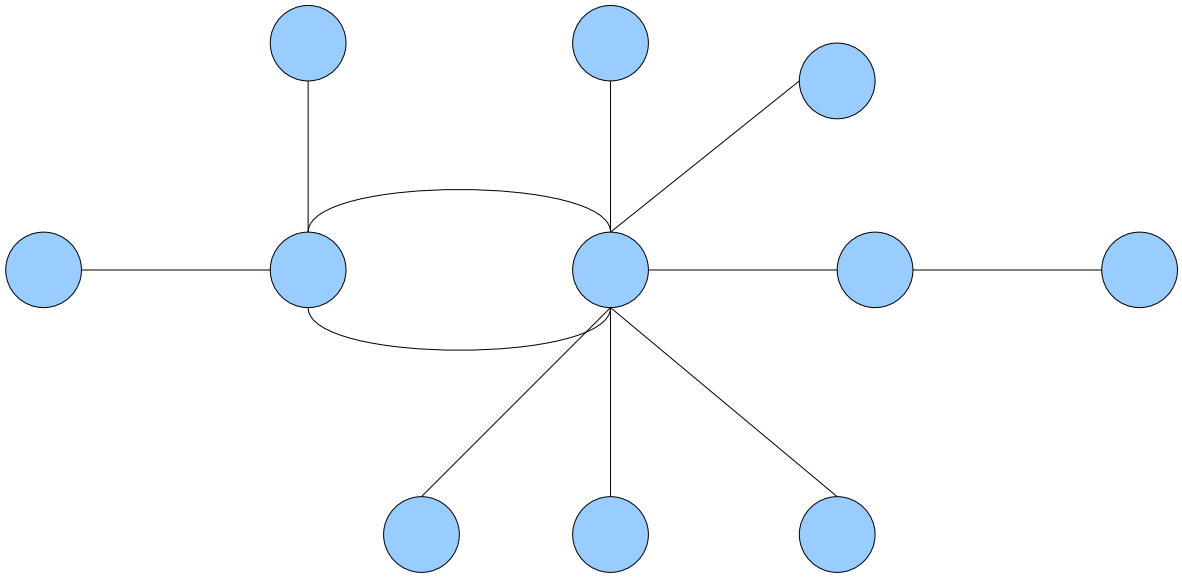
$$P(ak) = a^{-\alpha} P(k)$$

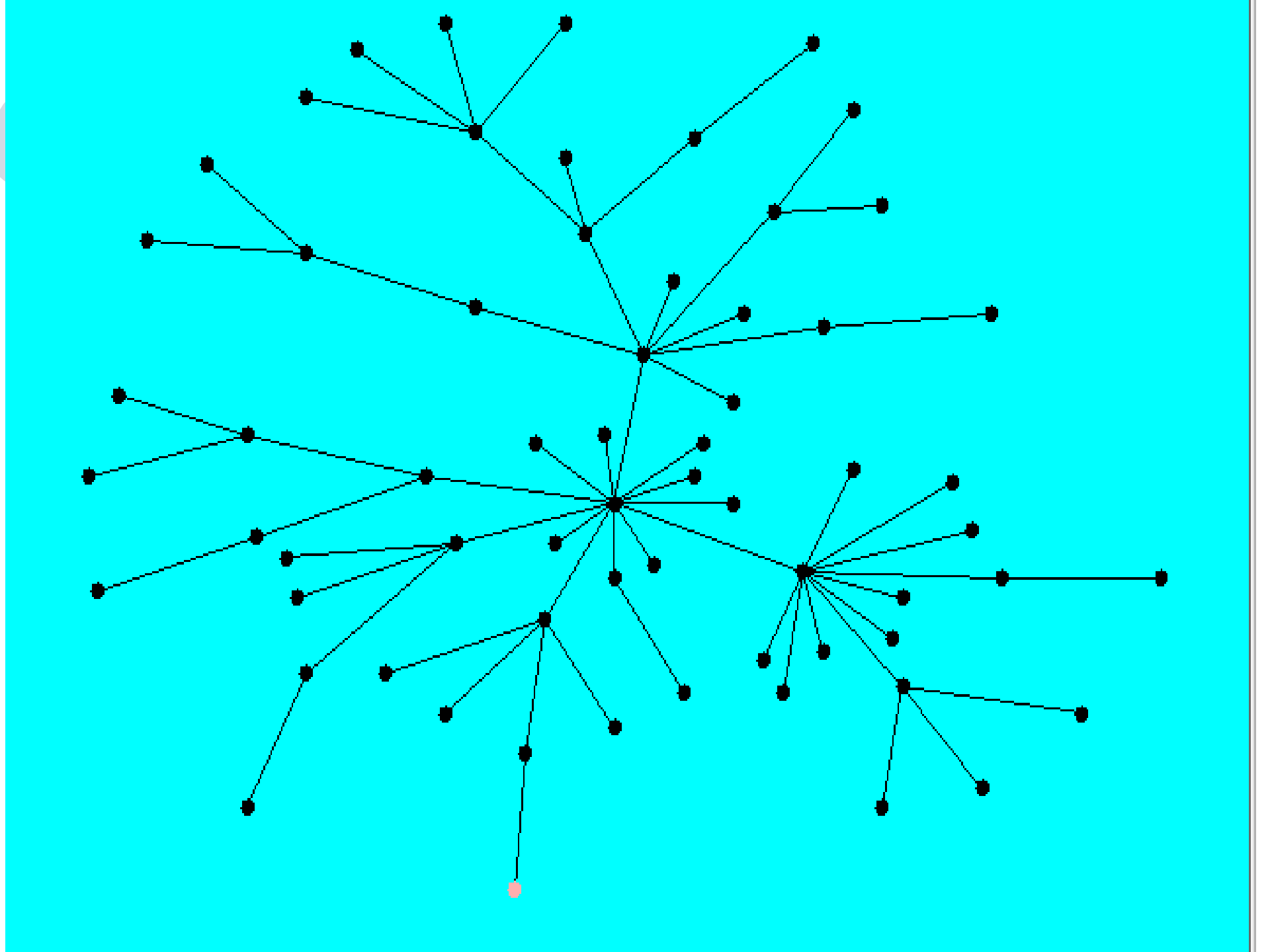
Preferential Attachment

- 頂点の性質によって接続相手を選
  - Preferential Attachment
- 多くの辺を有する頂点ほど多くの辺を集める
  - 次数に依存した選択確率
- A.-L. Barabási and R. Albert, Science **286** (1999) 509.
  - DOI: 10.1126/ science.286.5439.509

構築方法
Construction of network

- 多重接続を許すネットワーク
- 初期時刻(t =2)で二個の節を二本の辺で接続
- 各時刻で一つの節を追加し、既存の節をランダムに選んで接続
  - 次数k の節が確率$k/(2t)$で選ばれる
- 時刻t に、t 個の節とt 本の辺
- 節に番号をつけるs =1,2,3,4,..,t





節 s に k 本の辺がある確率

- Master 方程式

$$p(k,s,t+1)=\frac{k-1}{2\mathrm{t}}p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{k}{2\mathrm{t}}\right)p(k,s,t)$$

- 次数 k の頂点の選ばれる確率 $\Pi(k)$

$$\Pi(k)=N^{-1}k$$

$$N=\sum_{s=1}^{t}k_s=2\mathrm{t}$$

- 初期条件

$$p(k, s=\{1,2\}, t=2)=\delta_{k,2}$$

- 境界条件

$$p(k, s=t, t>2)=\delta_{k,1}$$

- 平均

$$P(k,t)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

Master方程式の両辺の平均をとる

$$\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t+1)=\frac{k-1}{2\mathrm{t}}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{k}{2\mathrm{t}}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

$$\sum_{s=1}^{t+1} p(k,s,t+1)-\delta_{k,1}=\frac{k-1}{2}P(k-1,t)+t\left(1-\frac{k}{2\mathrm{t}}\right)P(k,t)$$

$$(t+1)P(k,t+1)-\delta_{k,1}=\frac{k-1}{2}P(k-1,t)+t\left(1-\frac{k}{2\mathrm{t}}\right)P(k,t)$$

$$(t+1)P(k,t+1)-tP(k,t)=\frac{1}{2}\left[(k-1)P(k-1,t)-kP(k,t)\right]+\delta_{k,1}$$

Stationary solution

$$P(k)+\frac{1}{2}\left[k\,P(k)-(k-1)\,P(k-1)\right]=\delta_{k,1}$$

$$\downarrow$$

$$P(1)=\frac{2}{3}$$

$$(k+2)\,P(k)=(k-1)\,P(k-1)$$

解を求める

- 予想

$$P(k)=\frac{k-1}{k+2}P(k-1)=\frac{k-1}{k+2}\frac{k-2}{k+1}P(k-2)$$

$$=\frac{k-1}{k+2}\frac{k-2}{k+1}\frac{k-3}{k}P(k-3)$$

$$P(k)=\alpha\frac{(k-1)!}{(k+2)!}=\frac{\alpha}{(k+2)(k+1)k}$$

$$P(k)=\frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

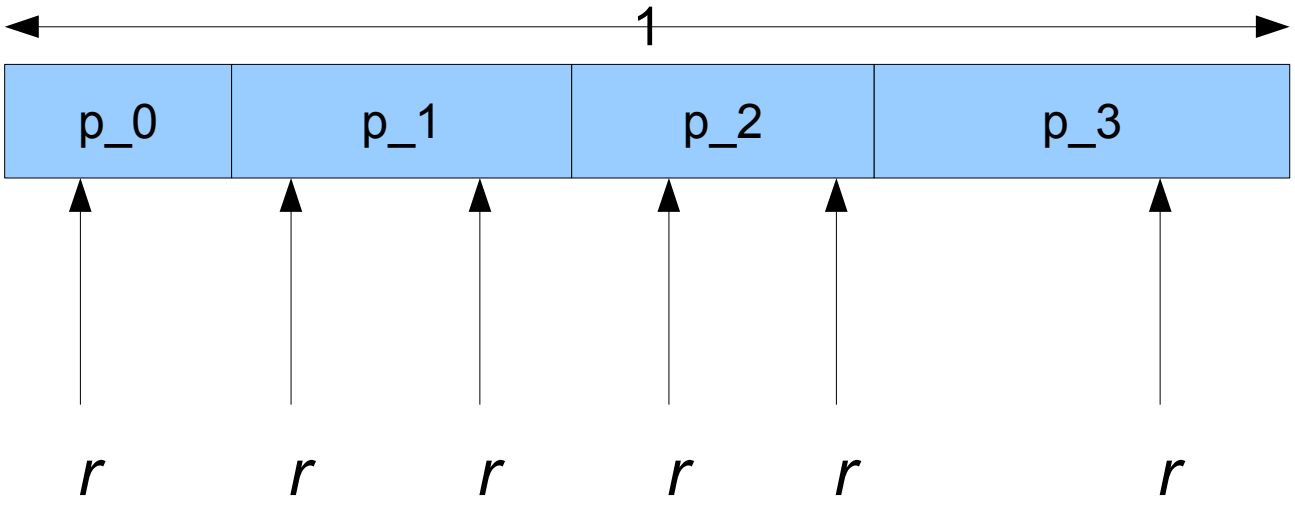
- 数学的帰納法(Mathematical Induction)

$$P(1)=\frac{4}{3\times 2\times 1}=\frac{2}{3}$$

$$P(k)=\frac{k-1}{k+2}P(k-1)=\frac{k-1}{k+2}\frac{4}{(k+1)k(k-1)}=\frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

補足:N個の要素をそれぞれ確率 p_i で選択する方法:解説

$$\{p_i\} \quad (i=0,1,2,3)$$



補足:N個の要素をそれぞれ確率 p_i で選択する方法

```
double r=Math.random();
int j=0;
double pp=0;
boolean id=true;
for(int i=0;i<N && id;i++){
  pp+=p[i];
  if(r<pp){  j=i; id=false;  }
}
```

なぜ「べき則」に関心があるのか

- 通常の現象は、系の様々なスケールを反映
  - 同じスケールのものとしか反応しない
  - 色：反射屈折する光の波長
  - 相転移点：相互作用の距離
  - 温度に対応した波長
- 系の詳細に依存しない現象
  - スケール依存性を失った現象
  - 様々な系に共通な現象、考え方

スケールを失った現象

- 相転移近傍の挙動
  - 臨界現象(Critical Phenomena)
  - Universalな現象
  - 系の次元、秩序変数の次元などに依存
- Fractals
- 自己組織化臨界現象
  - Self-Organized Criticality