Preparation：準備

基礎的事項

- Network (graph)：節(vertices)を辺(edges)で結んだもの
  - 辺で結ばれていない節を含む場合もある
  - 無向Network ： undirected networks
  - 有向Network ： directed networks
  - 加重Network ： weighted network

- 次数(degree) k ：
  - 節あたりの辺の数
  - 辺の総数と平均の次数
  - 有向Networkではin-degree k_i とout-degree k_o

$$k = k_i + k_o$$

-

Random Network (Graph)

- 構成方法
  - 固定された数の節
  - ランダムに選ばれた節の組を辺で結ぶ
- 数学でのRandom Graphの定義
  - Erdös and Rényi

- この講義での関心は、random networkの集合(ensemble)の性質にある
- Emsemble
  - あるパラメタで指定されたサンプルの集合
- 平衡(Equilibirum)
  - 巨視的(macroscopic)性質が時間的に不変
- 数学的なrandom graph は平衡

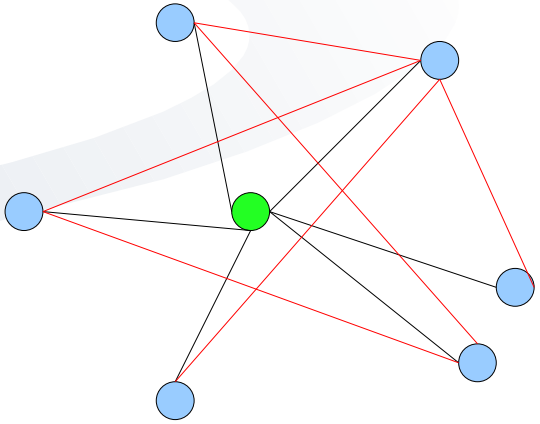
- 非平衡なrandom network
  - 各時刻に新しい節を加える
  - Random に新しい辺を加える
- 定常(stationary)な性質に関心がある
- どのように「random」に辺を加えるかで異なるnetworkができる

次数分布

- 次数分布 $P(k, N)$
  - N： 節の数
  - k： 次数
- 平均次数 $\bar{k} = \sum_k kP(k)$
- 辺の総数
  - 各辺で二回数えていることに注意

$$L = \frac{1}{2}\bar{k}N$$

クラスタリング係数 (clustering coefficient)



- 辺の集中の程度を表す
- ある節A、及びAと結ばれた節B_i を考える
  - Aの次数をz とする
  - B_i を全て相互に結ぶ場合の辺の総数

$$y_{\max} = \frac{z(z-1)}{2}$$

  - 実際に結ばれている辺(赤い辺)の数 y

$$C = \frac{y}{y_{\max}} \leq 1$$

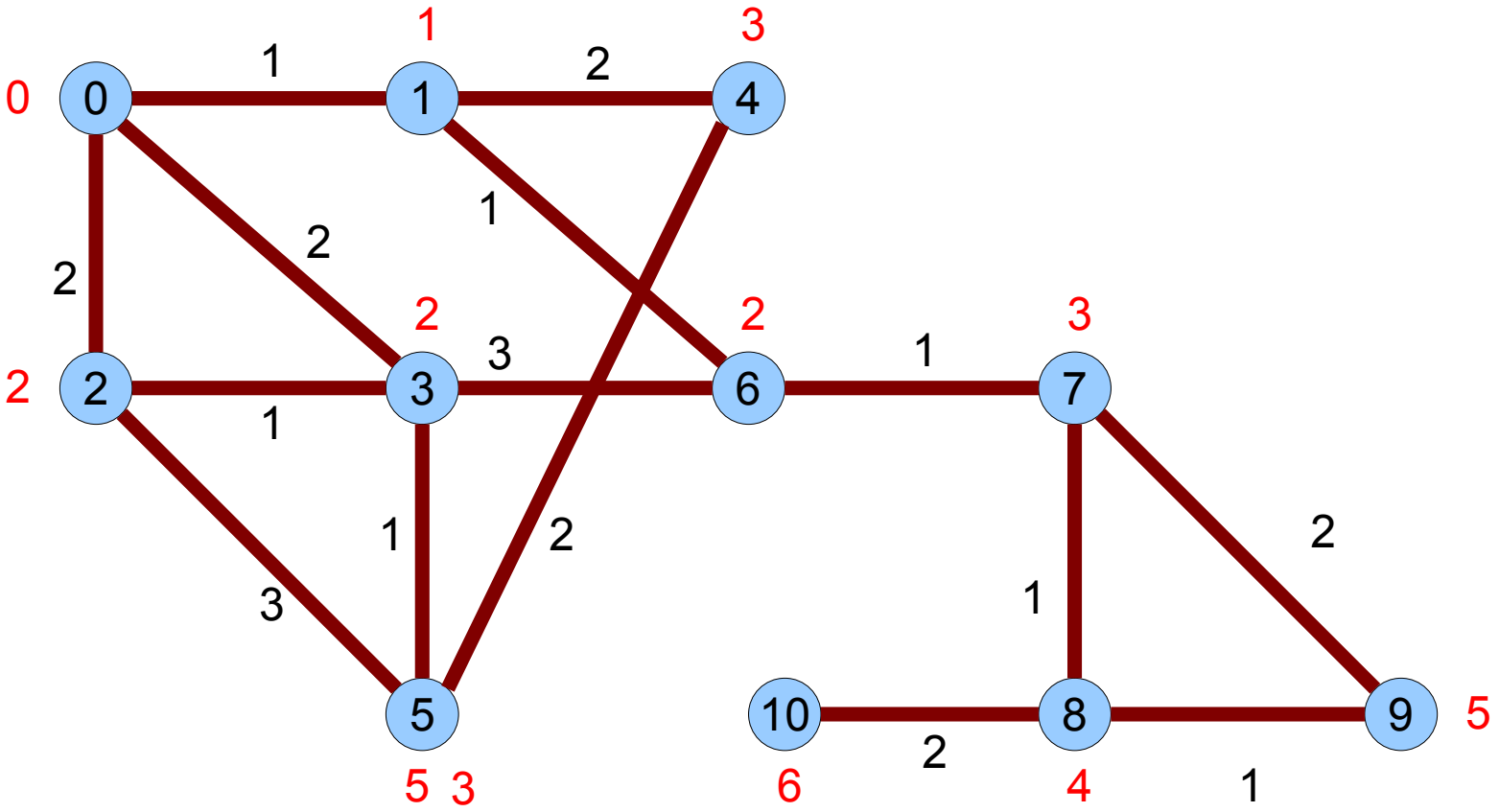
  - 平均のクラスタリング係数 $\bar{C}$

頂点間の距離

- 頂点q_iとq_jの距離
  - w_{kl} ： 頂点q_kとq_lが直接結ばれている時の距離(重み)
  - Q_iとq_jを結ぶ経路のうち
  -
  - を最小とする経路のd_{ij}
  - Dijkstra法

$$d_{ij}=w_{ik_1}+w_{k_1k_2}+\ldots+w_{k_nj}$$

Dijkstra法の例題



平均距離

- 任意に二つの節を選んだ際の距離(辺の数) l
- l の分布 $P(l)$
- 平均距離

$$\bar{l} = \sum_{l} lP(l)$$

- ネットワークの直径 $R = \max(l_{ij})$

- ある節に注目
  - その節から距離1である節の数　$z_1 = z$
  - その節から距離2である節の数　z_2
  - その節から距離mである節の数　z_m
- 分布
  - 距離mである節の数の分布

$$P_m(z)$$

次数分布と距離分布の関係

- 距離分布 $P(l)$ とm次の次数分布 $P_m(z)$

$$P(l)=\frac{N\sum_z zP_l(z)}{N\sum_m\sum_z z\,P_m(z)}=\frac{1}{N}\sum_z z\,P_l(z)$$

$$P_l(z)=\binom{N-1}{z}P^z(l)\left(1-P(l)\right)^{N-1-z}$$

媒介性(Betweenness)

- ある節m に注目したとき
  - その節を通過する最短経路の割合
  - その節のネットワーク内の重要性・荷重を表す
- 二つの節の最短経路の数 $B(i,j)$
- そのうちm を経由する最短経路の数 $B(i,m,j)$
- Betweenness

$$\sigma(m)=\sum_{i\neq j}\frac{B(i,m,j)}{B(i,j)}$$