Random Graphs

Erdös-Rényi Network

- 古典的random network
- 構成方法1
  - 一定数 N の節
  - 全ての節の組に対して確率 p で辺を接続する
- 構成方法2
  - 一定数 N の節
  - 一定数 $L = pN(N-1)/2$ の辺をランダムに選んだ節の組に接続する

辺の分布

- ある頂点が k 個の辺を持つ確率
  - 確率 p で辺を持つ
  - 辺の最大数は $N-1$

$$P(k)=\binom{N-1}{k}p^k(1-p)^{N-1-k}$$

平均次数

$$
\begin{aligned}
\bar{k} &= \sum_{k=0}^{N-1} k P(k) = \sum_{k=0}^{N-1} k \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{(N-1)!}{k!(N-1-k)!} p^k (1-p)^{N-1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(N-1)(N-2)!}{(k-1)!\big(N-2-(k-1)\big)!} p\, p^{k-1} (1-p)^{N-2-(k-1)} \\
&= p(N-1)
\end{aligned}
$$

標準偏差

$$\langle k^2\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}k^2P(k)=\sum_{k=0}^{N-1}\left[k(k-1)+k\right]P(k)=\sum_{k=0}^{N-1}k(k-1)P(k)+\bar{k}$$

$$=\sum_{k=2}^{N-1}k(k-1)\binom{N-1}{k}p^k(1-p)^{N-1-k}+\bar{k}$$

$$=\sum_{k=2}^{N-1}\frac{k(k-1)(N-1)!}{k!(N-1-k)!}p^k(1-p)^{N-1-k}+\bar{k}$$

$$=\sum_{k=2}^{N-1}\frac{(N-1)(N-2)(N-3)!}{(k-2)!(N-3-(k-2))!}p^2p^{k-2}(1-p)^{N-3-(k-2)}+\bar{k}$$

$$=p^2(N-1)(N-2)+\bar{k}=p(N-1)\left[p(N-2)+1\right]$$

- 標準偏差

$$\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \bar{k}^2 = p(1-p)(N-1)$$

$$\frac{\sigma}{\bar{k}} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1/2} (N-1)^{-1/2}$$

次数分布 $N \to \infty$, $pN \to \infty$, k 一定

- 準備
  - $$(1+1/n)^n \underset{n\to\infty}{\to} e\times\left(1-\frac{1}{2\mathrm{n}}+O\left(n^{-2}\right)\right)$$

$$f(x)=(1+x)^{1/x}$$

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O\left(x^4\right)\right)$$

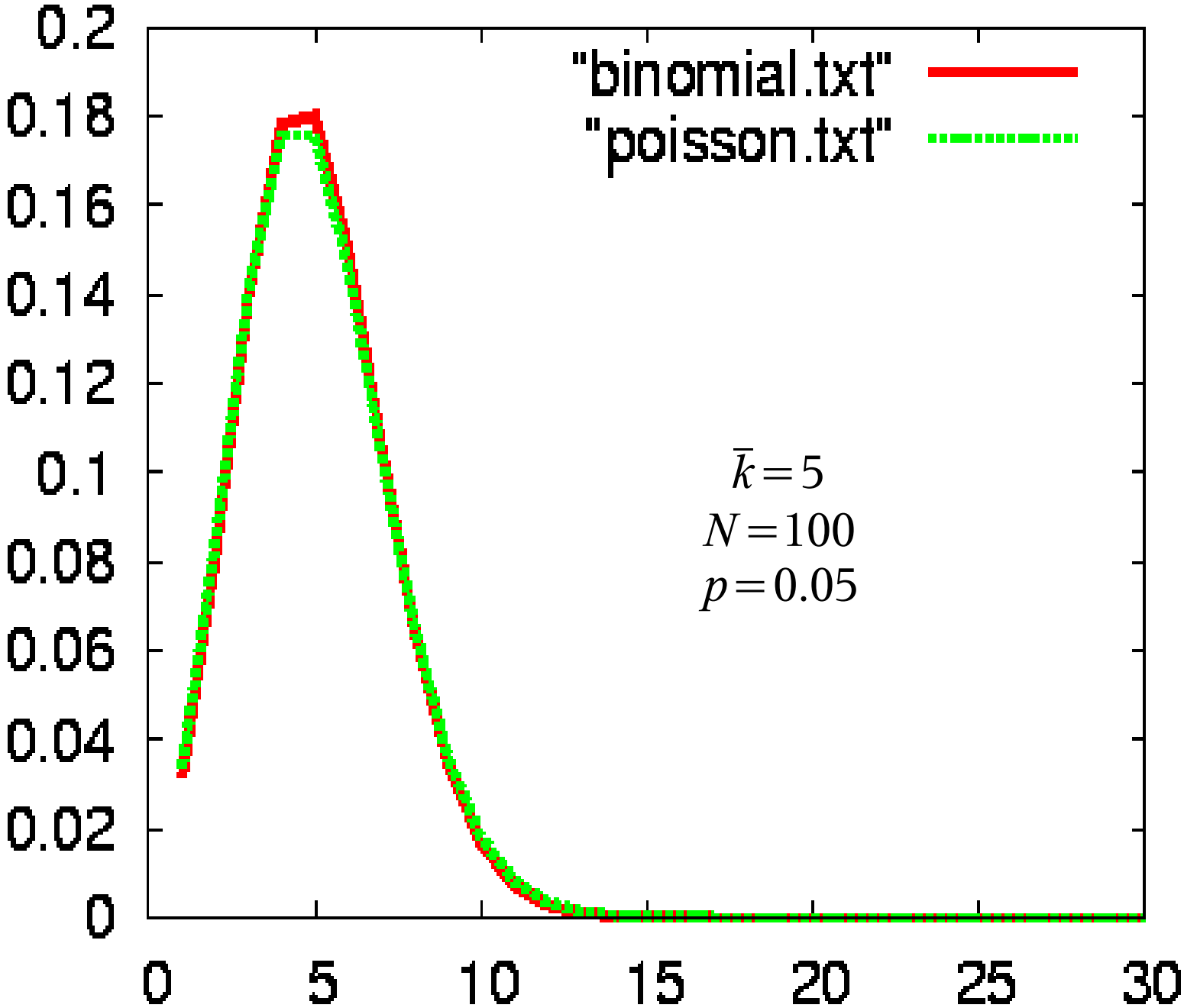
$$f(x)=e\times\left(1-\frac{1}{2}x+O\left(x^2\right)\right)$$

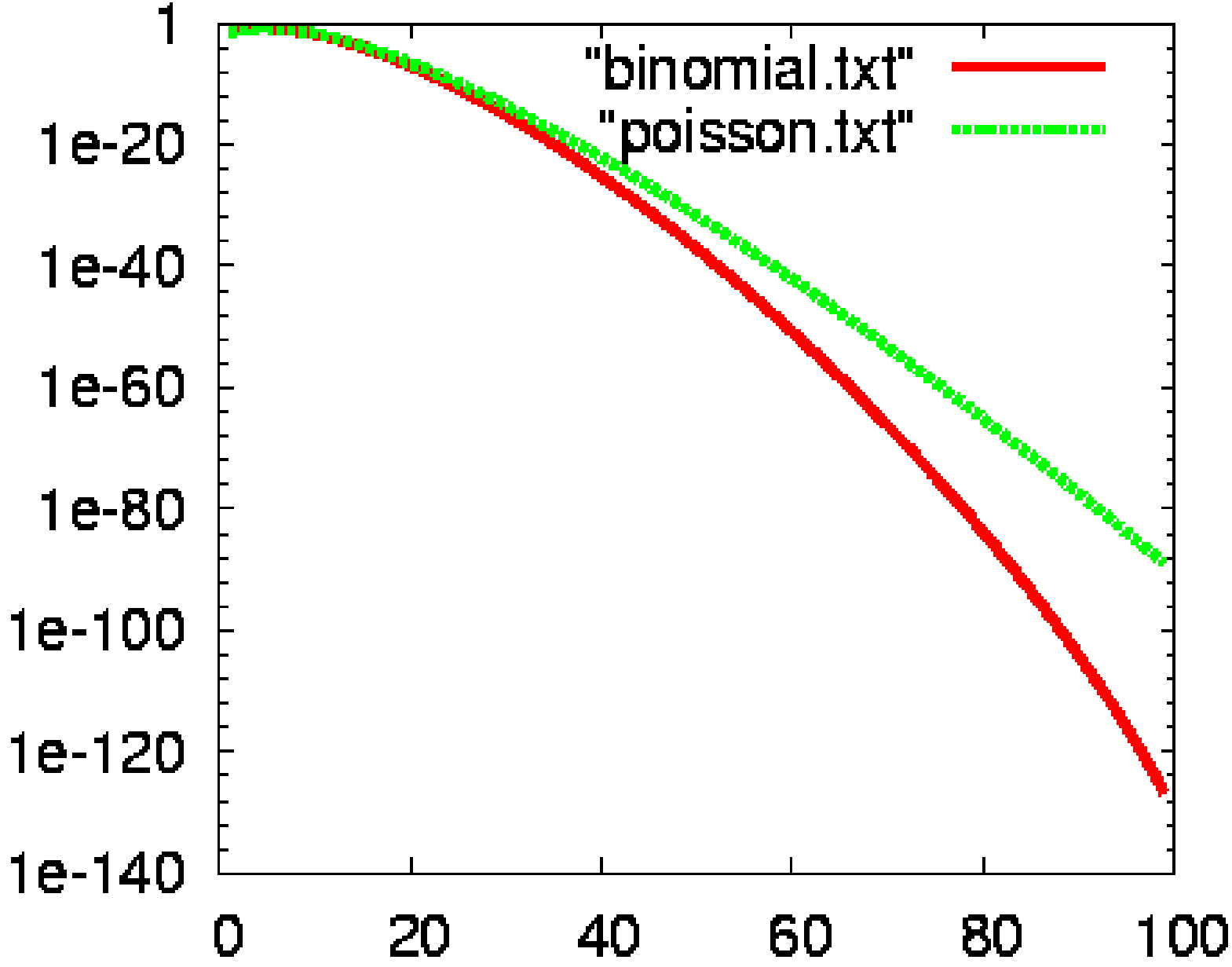
- $$\prod_{i=1}^{k}(N-i)=N^{k}\left(1-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)+O\left(N^{-2}\right)\right)$$
$$=N^{k}\left(1-\frac{k(k+1)}{2N}+O\left(N^{-2}\right)\right)$$

- $$(1-p)^{N-1-k}=\left(1-\frac{\bar{k}}{N-1}\right)^{\bar{k}(N-1)/\bar{k}}\left(1-\frac{\bar{k}}{N-1}\right)^{-k}$$
$$=e^{-\bar{k}}\left(1+\frac{\bar{k}^{2}}{2(N-1)}+O\left(N^{-2}\right)\right)$$

- 二項分布はPoisson分布で近似される

$$P(k)=\frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(N-i)\,p^{k}(1-p)^{N-1-k}$$
$$=\frac{1}{k!}\bar{k}^{k}e^{-\bar{k}}\left(1+O\left(N^{-1}\right)\right)$$


"binomial.txt"
"poisson.txt"
$\bar{k} = 5$
$N = 100$
$p = 0.05$
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
5
10
15
20
25
30

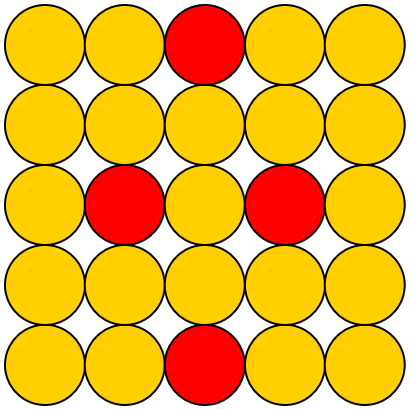

"binomial.txt"
"poisson.txt"
1
1e-20
1e-40
1e-60
1e-80
1e-100
1e-120
1e-140
0
20
40
60
80
100

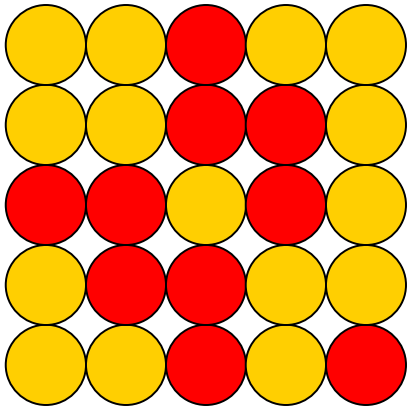
平均距離

- 二つの節の間の距離の平均値
  - 距離の定義
    - 重みの在る辺：例えばEuclid距離や時間、コスト
    - 重みの無い辺：一つの辺の距離を1と数える
  - 非連結ネットワークの問題
    - 連結したサブグラフ内でしか定義できない。

非連結ネットワークの問題

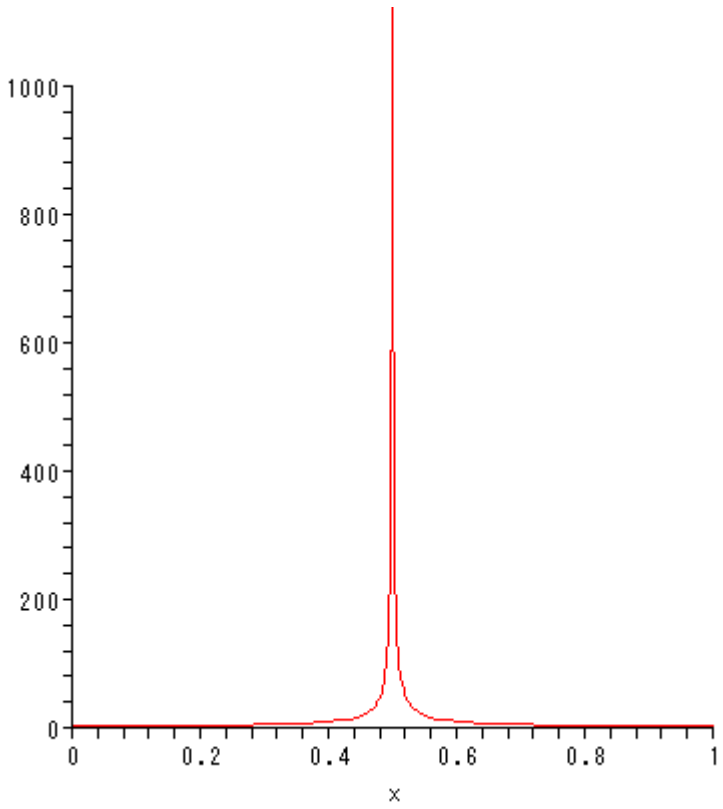
- 浸透現象：Percolation





p:小　　p:大

ランダムグラフでの平均距離

- 辺を持つ確率pが小さい
  - 連結されていない小さいネットワークに分かれている
  - 平均距離は短い:連結の場合だけを考える
- 辺を持つ確率pが非常に大きい
  - 全体が連結されている
  - 多くの頂点と直接結ばれている：平均距離は短い
- 中間のp で何が起こる

- pを0から次第に増やす
  - 平均距離が増える
- pを1から次第に減らす
  - 平均距離が増える
- 全体が連結するpで何かが起こる
  - 相転移（phase transition）
  - 平均距離の発散、正確にはシステムサイズ程度になる