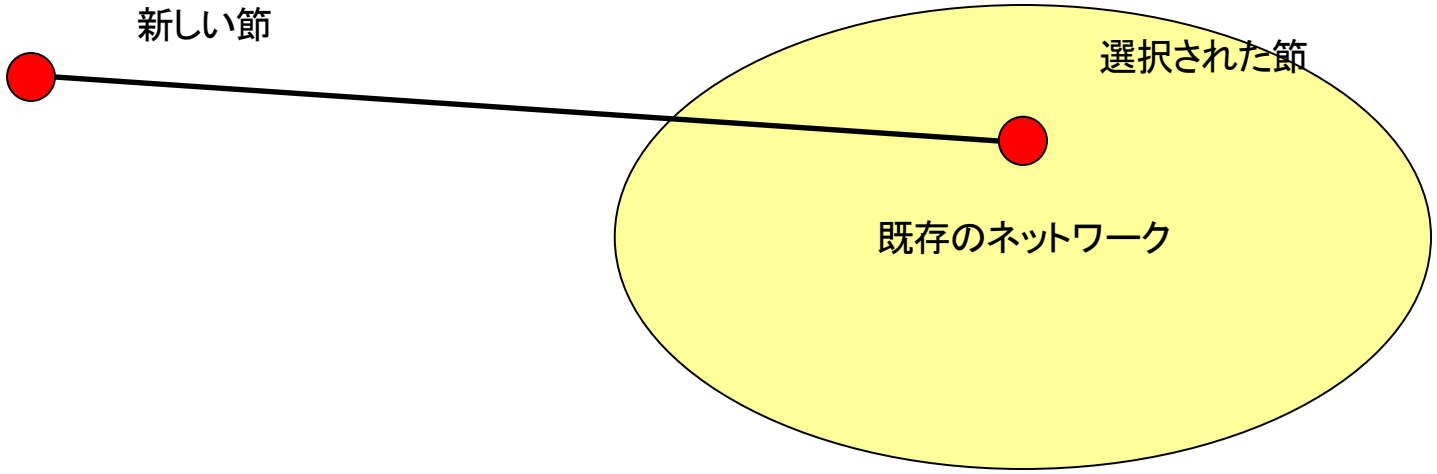
Growing Random (Exponential) Networks

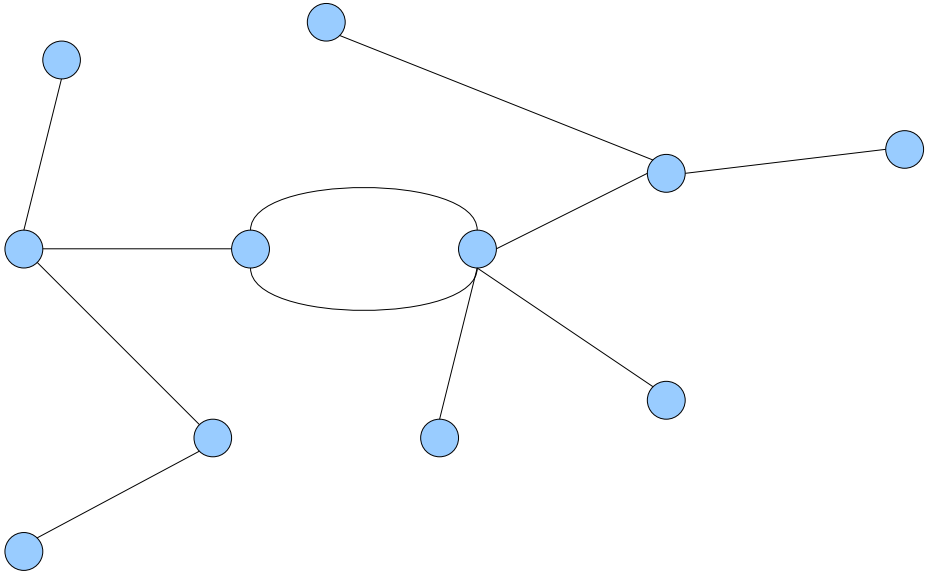
成長するネットワーク

- 実際のネットワークは成長し続けている
  - インターネット
  - Webページのリンク
- 新しくできた節は、既存の節へ辺を生成する
  - 既存の節の性質に関わらないランダムな選択
    - Random attachment
  - 既存の節の性質(次数など)によるランダムな選択
    - Preferential attachment

成長するでたらめなネットワーク

- 多重接続を許すネットワーク
- 初期時刻(t =2)で二個の節を二本の辺で接続
- 各時刻で一つの節を追加し、既存の節をランダムに選んで接続
- 時刻t に、t 個の節とt 本の辺
- 節に番号をつけるs =1, 2, 3, 4, . . , t


新しい節
選択された節
既存のネットワーク



グラフの統計的性質を調べる

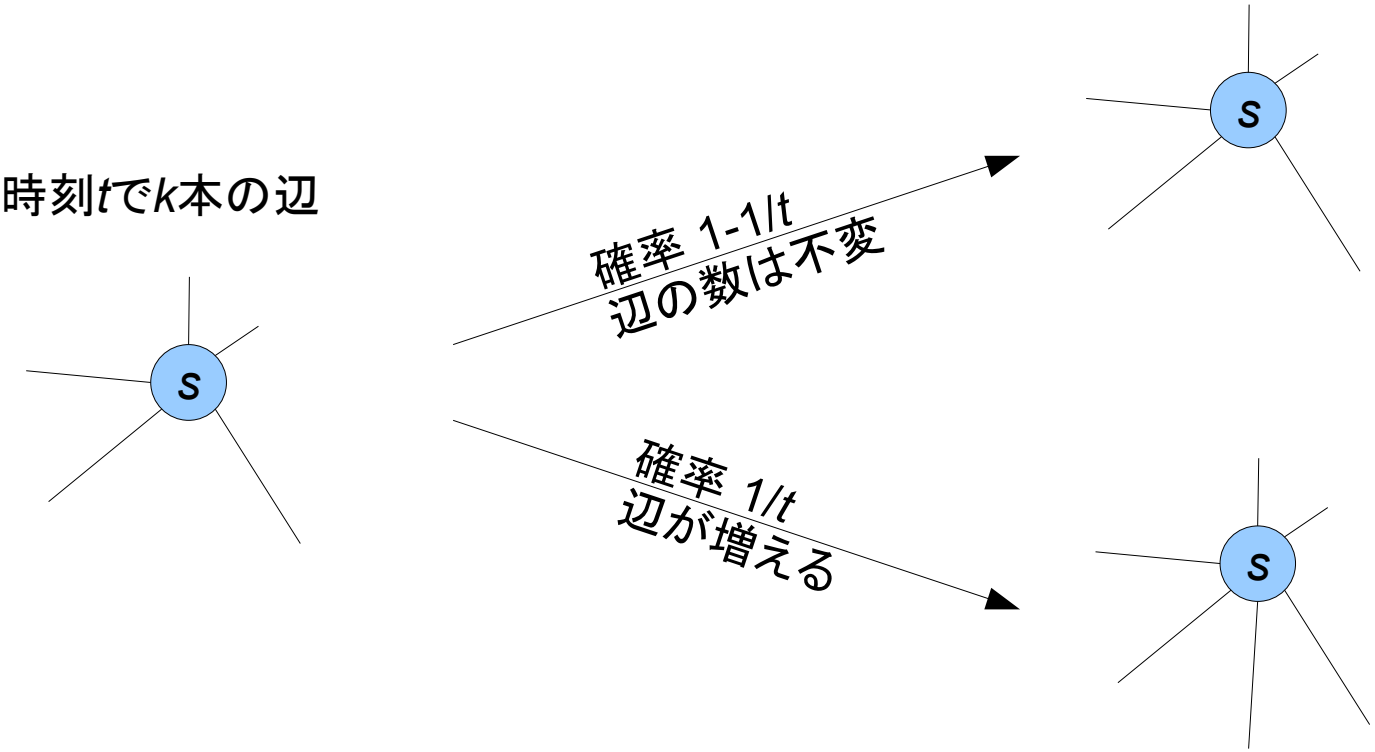
- ある節に何本の辺があるか
- その時間発展方程式から平衡解を得る
- Master方程式
  - 確率過程を表現する
  - 確率が変化する要因

節s にk 本の辺がある確率

- 確率の時間発展方程式：Master 方程式
- 時刻t に存在する頂点数はt
- 時刻t で既にk −1 本の辺があり、新しい節から選ばれて、k 本の辺を持つようになる場合
- 時刻t で既にk 本の辺があり、新しい節から選ばれない場合

$$p(k,s,t+1)=\frac{1}{t}p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{1}{t}\right)p(k,s,t)$$

時刻tでk本の辺



- 初期条件

$$p(k, s=\{1,2\}, t=2)=\delta_{k,2}$$

- 境界条件

$$p(k, s=t, t>2)=\delta_{k,1}$$

- 平均

$$P(k,t)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

Master方程式の両辺の平均をとる

$$\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t+1)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{1}{t}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

$$\sum_{s=1}^{t+1} p(k,s,t+1)-\delta_{k,1}=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{1}{t}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

$$(t+1)P(k,t+1)-\delta_{k,1}=P(k-1,t)+t\left(1-\frac{1}{t}\right)P(k,t)$$

$$(t+1)P(k,t+1)-tP(k,t)=P(k-1,t)-P(k,t)+\delta_{k,1}$$

無限時間極限：平衡解

$$2P(k)-P(k-1)=\delta_{k,1}$$
$$\downarrow$$
$$P(k)=2^{-k}$$

$$P(1)=\frac{1}{2},\quad P(k)=\frac{1}{2}P(k-1)$$

- 指数関数型の次数分布

まとめ

- ランダムに成長するネットワーク
- 指数関数型の次数分布
- 関心のあるネットワークとは異なる
- 節の性質に依存した辺の生成が必要
  - 既にある辺の数など

補足:新しい頂点から m 本の辺を生成

- 初期条件：時刻 $t=m$ で頂点数 m の完全グラフ
- 時刻 $t+1$ に新しい頂点を生成し、既存の頂点にm 本の辺を生成する
- 各時刻に新しい頂点を生成し、既存の頂点をランダムに m 個選択し辺を生成する
- 時刻 t である頂点が選択される確率

$$\binom{t-1}{m-1}\Big/\binom{t}{m}=\frac{(t-1)!}{(m-1)!(t-m)!}\frac{m!(t-m)!}{t!}=\frac{m}{t}$$

$$p(k,s,t+1)=\frac{m}{t}\,p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{m}{t}\right)p(k,s,t)$$

$$p(k,s=t,t)=\delta_{k,m}$$

$$\downarrow$$

$$(t+1)P(k,t+1)-tP(k,t)=m\left[P(k-1,t)-P(k,t)\right]+\delta_{k,m}$$

平衡解

$$(1+m)P(k)=mP(k-1)+\delta_{k,m}$$

$$\downarrow$$

$$P(k)=\frac{1}{1+m}\left(\frac{m}{1+m}\right)^{k-m}$$

$$P(m)=\frac{1}{1+m}$$

$$P(k<m)=0$$