閾値モデル
(Threshold Model)

成長しない
スケールフリーネットワーク

- N個の頂点
- 各頂点に値 w
  - 値の分布 $f(w)$
- 頂点iと頂点jに辺を生成する条件

$$w_i + w_j \geq \theta$$

どうゆう現象を考えている

- 事業が開始する際に、資金の和が一定以上になるようにパートナーを選ぶ。
- activityがそれぞれに高く、和が水準を超えて高くなるならば、協力する。

次数分布

- 重みがw より大きい確率

$$1-F(w)=\int_w^\infty f(w')\mathrm{d}w'$$

- 重みw を持つ頂点の次数

$$k\simeq N\int_{\theta-w}^\infty f(w')\mathrm{d}w'=N\left[1-F(\theta-w)\right]$$

$$\downarrow$$

$$w=\theta-F^{-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

$$1 = -N \frac{\mathrm{d}\, F(\theta - w)}{\mathrm{d}\, k} = N\, f(\theta - w) \frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, k}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, k} = \frac{1}{N} \frac{1}{f(\theta - w)}$$

$$p(k) = f(w) \frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, k} = \frac{1}{N} \frac{f\left(\theta - F^{-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right)}$$

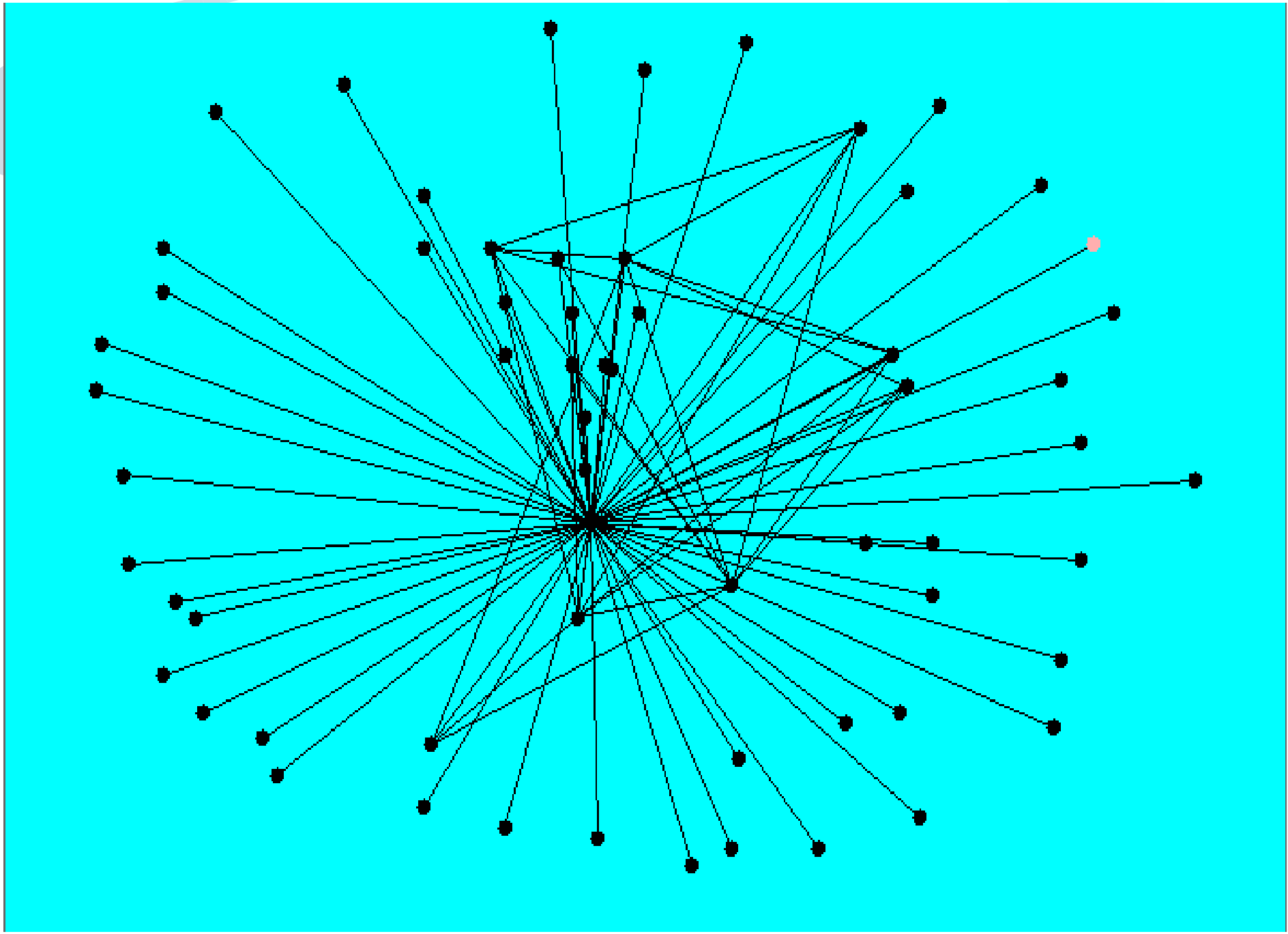
指数関数分布の場合

$$f(w)=\lambda e^{-\lambda w}\quad (w\geq 0)\rightarrow F^{-1}(x)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$$

$$p(k)=\frac{1}{N}\frac{f\left(\theta-F^{-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\right)}{f\left(F^{-1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{N}f\left(\theta+\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{k}{N}\right)\right)/f\left(-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{k}{N}\right)\right)$$

$$=\frac{N}{k^2}e^{-\lambda\theta}$$



変換法
一様乱数から分布を指定された乱数へ

- 確率密度 $f(x)$ に従う乱数を生成する
  - 範囲 $x_{\min} \le x < x_{\max}, \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
  - 確率分布 $0 \le F(x) = \int_{x_{\min}}^{x} f(x')\,\mathrm{d}x' < 1$
- 一様乱数を発生 $0 \le r < 1$
  - $x = F^{-1}(r)$ は $f(x)$ に従う

指数分布に従う乱数

- 確率密度
- 確率分布

$$f(w)=\lambda e^{-\lambda w}$$

$$F(w)=\int_0^w f(w')\,\mathrm{d}w'=1-e^{-\lambda w}$$

$$F^{-1}(x)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$$

$$[0,1)\to[0,\infty)$$