集合と写像

離散数学・オートマトン

2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

この講義の目的

- コンピュータは離散的
  - 0と1で全てを表現
  - 論理演算
- 離散数学
  - 計算機科学には必須
- オートマトンと形式言語
  - 抽象的計算機

集合 (Sets)

- ある特性を持ったモノの集まり
  - 要素 (elements)
  - 集合に含まれるか否かは明確でなければ
- 要素xが集合Aに含まれる
  - $x \in A$
- 要素xが集合Aに含まれない
  - $x \notin A$

集合の表現

- 外延的記述 (extensive description)
  - 要素の列挙
  - 例 : $A = \{2,3,5,7\}$
- 内包的記述 (inclusive description)
  - 条件の記述
  - 例 : $A = \{n | n$は10以下の素数$\}$

有限集合、無限集合、可算集合

- 有限集合 (finite sets)
  - 要素が有限個
- 無限集合 (infinite sets)
  - 要素が無限個
- 可算集合 (countable/denumerable sets)
  - 要素を列挙できる
  - 自然数と対応付けることができる

集合の簡単な例

- 自然数(natural numbers)全体N
- 整数(integers)全体Z
- 有理数(rational numbers)全体Q
- 実数(real numbers)全体R

集合の簡単な例

- 10以下の自然数
  - $A = \{n | n \in N, n \leq 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
- 10以下の素数
  - $B = \{2,3,5,7\}$
- 10未満の3で割り切れない自然数
  - $C = \{n | n \in N, n < 10, n \bmod 3 \neq 0\} = \{1,2,4,5,7,8\}$

閉区間、開区間、半開区間

- 閉区間 : $[a, b] = [a, b]\{x | a \leq x \leq b\}$
- 開区間 : $(a, b) = \{x | a < x < b\}$
- 半開区間 : $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

- 無限区間
  - $(-\infty, \infty)$、$[a, \infty)$、$(-\infty, b]$

集合に関わる記号など

- 集合Aの全て(任意)の要素：$\forall x \in A$
- 集合Aのある(特定の)要素：$\exists x \in A$
- 条件Pかつ条件Q：$P \wedge Q$
- 条件Pまたは条件Q：$P \vee Q$
- 条件Pの否定：$\neg P$

部分集合 (subsets)

- 集合Aの全ての要素が集合Bに含まれる
  - $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$
  - AはBの部分集合 : $A \subseteq B$
- AはBの部分集合であり、Bの要素でAに含まれないものがある
  - $(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B \Rightarrow y \notin A)$
  - AはBの真部分集合(true subsets) : $A \subset B$

部分集合の例

- $N \subset Z \subset Q \subset R$
- 2の倍数、3の倍数、6の倍数(すべて正)

$$A = \{ n | n = 2m, m \in N \}$$

$$B = \{ n | n = 3m, m \in N \}$$

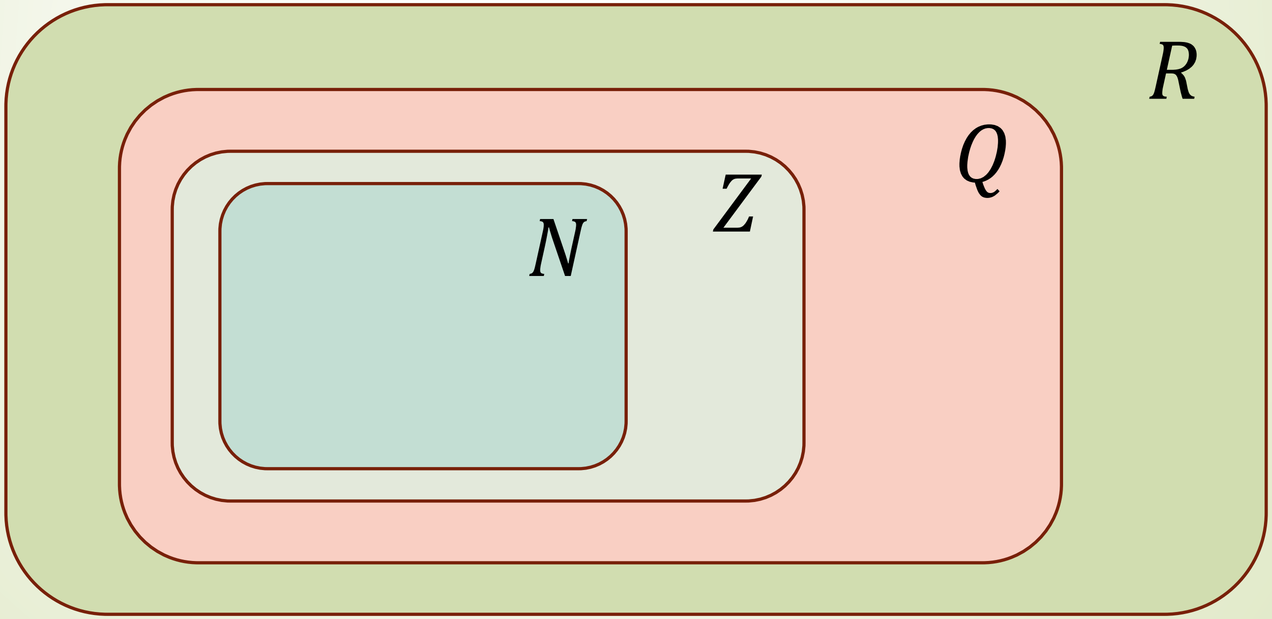
$$C = \{ n | n = 6m, m \in N \}$$

$$(C \subset A) \wedge (C \subset B)$$

$$C = A \cap B$$

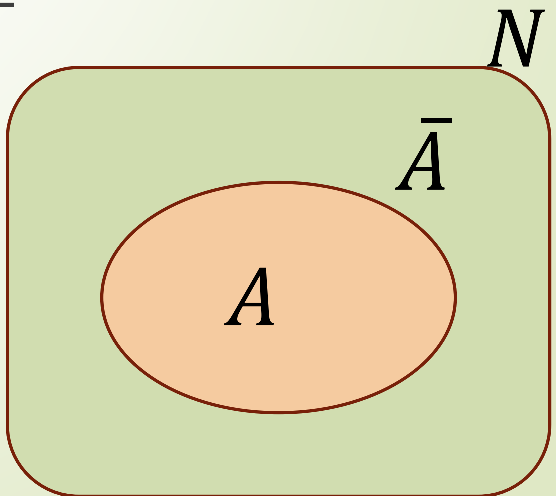
Venn図

- 集合の関係を図示する

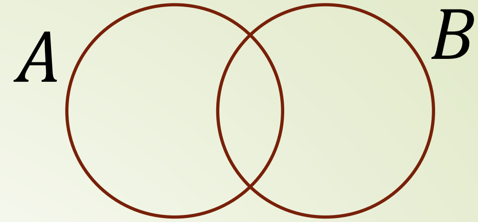


空集合と補集合 empty sets and complements

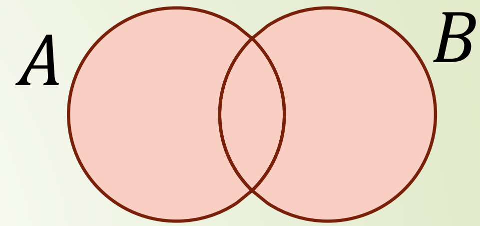
- 空集合 : $\emptyset$
  - 要素を持たない集合
- 補集合
  - 全体集合からある集合を除いた部分
  - 例 : 全体集合N、集合$A = \{n|n = 2m, m \in N\}$
    - $\bar{A} = \{n|n \in N \wedge n \notin A\}$



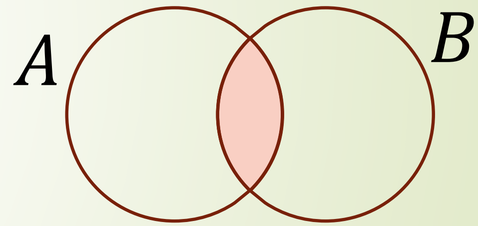
集合の演算



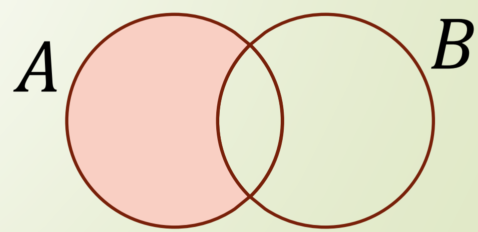
- 集合の和
  - $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



- 集合の共通部分
  - $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

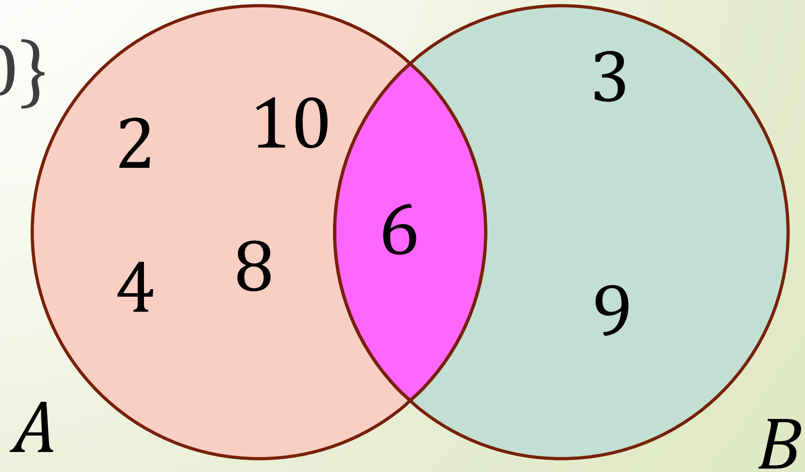


- 集合の差
  - $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



集合の演算の例

- $A = \{n | n = 2m, m \in N, n \leq 10\}$
- $B = \{n | n = 3m, m \in N, n \leq 10\}$
- $A \cup B = \{2,3,4,6,8,9,10\}$
- $A \cap B = \{6\}$
- $A \setminus B = \{2,4,8,10\}$



集合演算の基本的性質

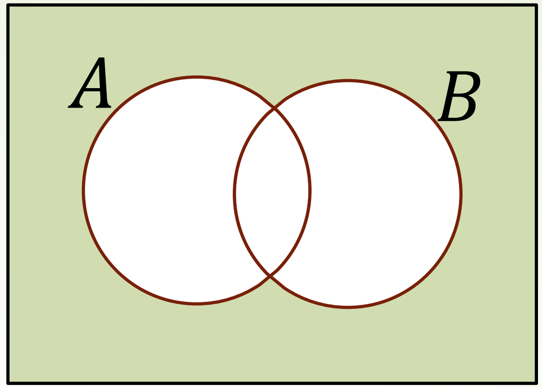
- 交換律
  - $X \cup Y = Y \cup X$
  - $X \cap Y = Y \cap X$
- 結合律
  - $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
  - $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

集合演算の基本的性質

- 分配律
  - $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
  - $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- 巾等律
  - $X \cup X = X$
  - $X \cap X = X$
- 吸収律
  - $X \cup (X \cap Y) = X$
  - $\mathrm{X} \cap (X \cup Y) = X$

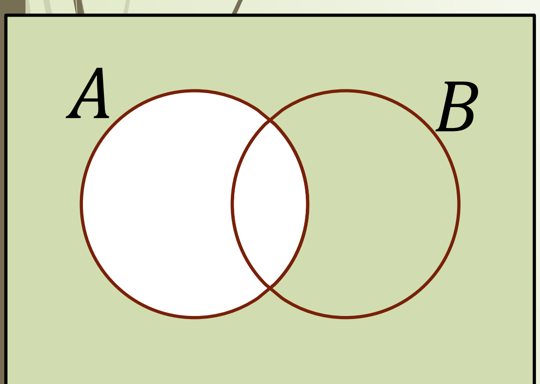
de Morganの法則

- 全体集合をU、その二つの部分集合をAとBとする
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



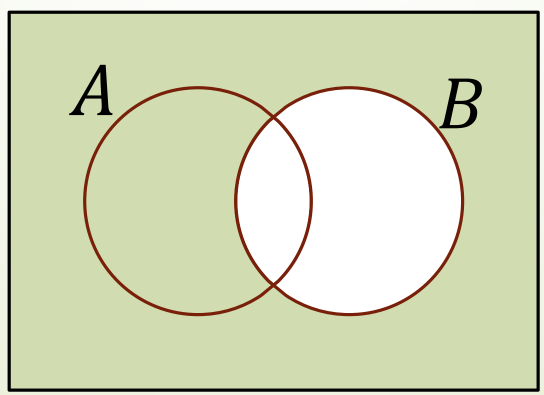
$$\overline{A \cup B}$$

$$\overline{A}$$



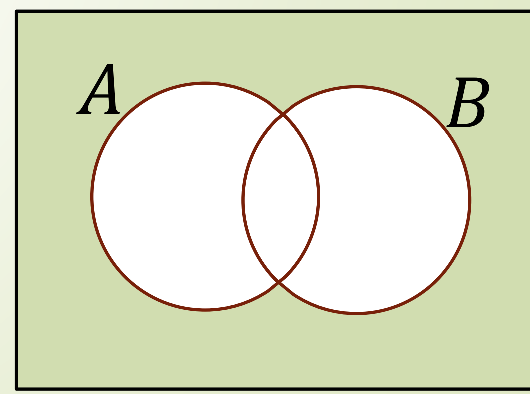
$$\cap$$

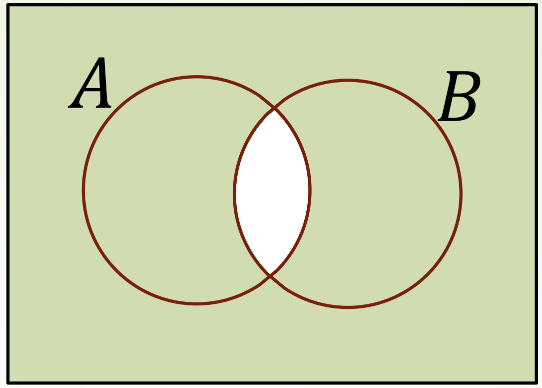
$$\overline{B}$$



$$=$$

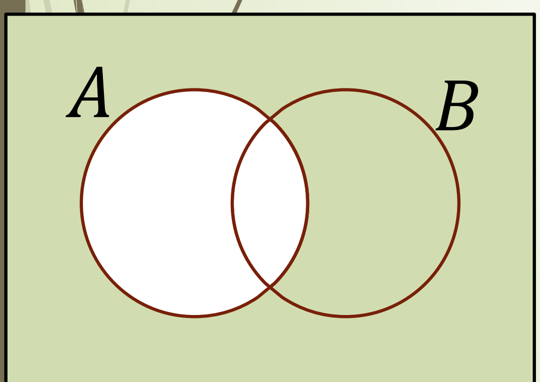
$$\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{B}$$





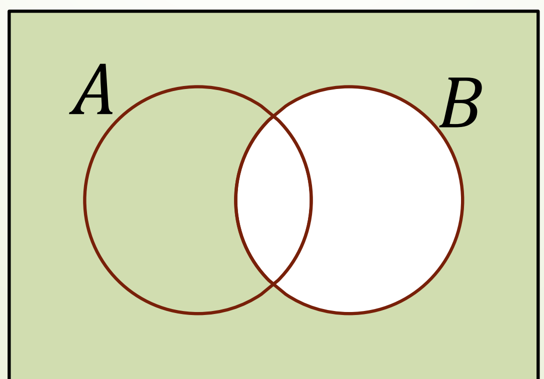
$$\overline{A \cap B}$$

$$\overline{A}$$



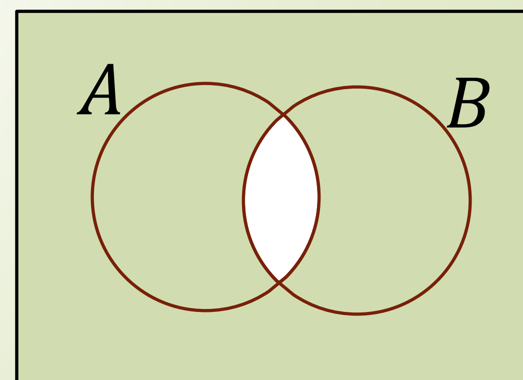
$$\cup$$

$$\overline{B}$$



$$=$$

$$\overline{A} \cup \overline{B}$$



集合の族(families)

- 要素が集合である「集合」
- 例：べき集合

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

写像(mappings)または関数(functions)

- 集合Xの各要素に、集合Yの要素が一つ対応しているときに、その対応関係を写像または関数と呼ぶ
  - $f: X \to Y$
  - X: 定義域(domain)
  - Y: 値域(range)

- $f(x) = y$
  - fによるxの像(image)
- $\{f(a) | a \in X\} \subseteq Y$: fによるXの像

写像の例

- 二次関数$f(x) = x^2$
  - $f: R \to \{x|x \in R, x \geq 0\}$
- 与えられた自然数を越えない最大の素数を返す写像p
  - $p: N \to \{n|n$は素数$\}$
- ASCII文字に対してコードを16進で返す写像h
  - $h: \{c|c$はASCII文字$\} \to \{c|c$は2桁の16進数$\}$

単射、全射、全単射

- 単射 (injective, one-to-one)
  - $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  - Xの異なる点には、Yの異なる点が対応
- 全射 (surjective, onto)
  - $\forall y \in Y$に対して$f(x) = y$なるxが存在
- 全単射 (bijective)
  - 逆写像が存在する

写像の四則演算

- 二つの関数fとg
- それぞれの定義域D_fとD_g
  - $(f \pm g)(x) = f(x) + g(x), (x \in D_f \cap D_g)$
  - $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), (x \in D_f \cap D_g)$
  - $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$

    $(x \in D_f \cap \{x | x \in D_g, g(x) \neq 0\})$
  - $(cf)(x) = cf(x)$,(cは定数)

写像の合成

- 三つの集合X、Y、Z
- 二つの写像:$f: X \to Y$、$g: Y \to Z$
- 合成関数
  - $g \circ f: X \to Z$
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

直積

- 値に順序がある組
  - 例:2次元の座標
- n個の値の組:n-tuple
  - $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$