命題と述語

離散数学・オートマトン

2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

命題

- 言明:ある事実を述べたもの
  - 真(true, 正しい)、偽(false, 正しくない)
- 命題 (proposition):真偽が定まる言明
- 真理値／論理値
  - T (true) またはF (false)

命題の例

1. 7は素数である:T
2. 整数の積は整数である:T
   $$\forall x \in Z, \forall y \in Z, \exists z \in Z[xy = z]$$
3. $2 + 3 = 6$:F
4. 任意の自然数は、1を除いて、一つまたはそれ以上の素数の積として一意に表すことができる(算術の基本定理):T

論理積と論理和

- 二つの命題pとq
- 論理積:$p \land q$
  - 二つの命題がいずれも成り立つとき真
- 論理和:$p \lor q$
  - 二つの命題のいずれか一方が成り立つとき真
- 排他的論理和:$p \oplus q$
  - 二つの命題のいずれか一方だけが成り立つとき真

真理値表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$
F	F	F	F	F
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	F

pはqを含意する

- pが成り立つならば、qが成り立つ
  - $p \Rightarrow q$:
  - pを前提(仮定)、qを結論という。
  - 「pはqを含意する」(p implies q)

pとqは論理的に等しい

- pが成り立つとき、かつその時に限って、qが成り立つ
  - $p \Leftrightarrow q$
  - pとqは同値
  - pとqは論理的に等しい

命題の「逆(opposite)」と「対偶(contrapositive)」

- 命題$p \Rightarrow q$の逆:$q \Rightarrow p$
- 命題$p \Rightarrow q$の対偶: $\neg q \Rightarrow \neg p$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	F	T	T

背理法 (proof by contradiction)

- 命題$p \Rightarrow q$をその対偶$\neg q \Rightarrow \neg p$を証明することで示す
- 例:合成数(1より大きい素数でない自然数)nは、$\sqrt{n}$以下の素因子を持つ。
  - 背理法で証明

合成数(1より大きい素数でない自然数)nは、$\sqrt{n}$以下の素因子を持つ。

- 例:nが$\sqrt{n}$以下の素因子を持たないと仮定。
  - $n = pq\,(1 < p \leq q < n)$と分解
  - $n = pq \geq p^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geq p$
  - pが素数ならば、仮定と矛盾
  - $p = rs$（rは素数）$\Rightarrow \sqrt{n} \geq p \geq r$、仮定と矛盾

以下のいずれも論理的に等しい

- $\neg(\neg p)$とp
- $p \Rightarrow q$と$\neg p \vee q$
- $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow F$と$p \Rightarrow q$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge (\neg q)$
F	F	T	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
T	T	T	T	F

de Morganの法則

- 以下はそれぞれ論理的に等しい
  - $\neg(p \vee q)$と$(\neg p) \wedge (\neg q)$
  - $\neg(p \wedge q)$と$(\neg p) \vee (\neg q)$

述語 (predicates)

- TまたはFを値とする関数を述語という
- 大文字のP、Qなどで表記
- $P: X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \to \{T, F\}$
  - $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$上の述語
- $Q: X^n \to \{T, F\}$
  - X上のn変数述語
- 命題:変数の無い述語

述語の例

- $P(x) = \begin{cases} T & \text{if } x \geq 0 \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $P(x)\colon x \geq 0$
- $P(x, y, z) = \begin{cases} T & \text{if } x^2 + y^2 = z^2 \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $P(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = z^2$