数学的帰納法と再帰的定義

離散数学・オートマトン

2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

自然数の定義
Peanoの公理

- Nが以下の3つを満たすとき、Nの要素を自然数という
  1. $1 \in N$
  2. 単射$S: N \to N$が存在。ただし$1 \notin S(N)$
  3. $M \subseteq N$が以下を満たすとき$M = N$
     a. $1 \in M$
     b. $S(M) \subseteq M$

- $S(n)$は$n+1$に相当:「後者」
- Peanoの2番目の公理より
  a. $x \in N \Rightarrow S(x) \in N$
  b. $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$
- Peanoの3番目の公理
  - 「後者」について言及することで、全てのの自然数について言及

数学的帰納法

- Peanoの3番目の公理を「数学的帰納法の公理」と呼ぶ
- $P(x), x \in N$に対する数学的帰納法
  - $P(1) = T$:帰納法の基礎
  - 任意に選んだkに対して$P(k) = T$を仮定

⇩ 帰納ステップ

  - $P(k+1) = T$を示す

数学的帰納法の例

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2, \forall n \in N \cup \{0\}$$

- $n=0$
  - LHS(左辺)=$\sum_{k=0}^{0}(2k+1)$=1
  - RHS(右辺)=$(0+1)^2=1$
- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$を$n$に対して仮定

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+\left(2(n+1)+1\right)$$

$$=(n+1)^2+2(n+1)+1=\left((n+1)+1\right)^2$$

数学的帰納法の例

集合Aの大きさ$|A|$に対して

$|A| < \infty$ならば$|2^A| = 2^{|A|}$

- $|A| = 0$、つまり$A = \emptyset$の場合
  - LHS : $|2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1$
  - RHS : $2^{|A|} = 2^0 = 1$
- あるkに対して、$|A| = k$ならば成り立つと仮定
  - $B = A \cup \{b\}$

つづき

- $2^B = 2^A \cup \{s \cup \{b\} | s \in 2^A\}$
  - 2^Bの要素は、2^Aの要素（$|2^A| = 2^k$個）と、2^Aの各要素にaを加えたもの（$|2^A| = 2^k$個）の全体
- $|2^B| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
- $2^{|B|} = 2^{|A|+1} = 2^{k+1}$

累積帰納法

- 命題$P(n), (n \in N, n \geq n_0)$

1. $P(n_0)$が成りたち
2. あるkに対して$P(m), n_0 \leq m \leq k$が成り立つならば$P(k+1)$も成り立つとき
3. 任意の$n \geq n_0$に対して$P(n)$が成り立つ

累積帰納法が正しいこと

- $k = n_0$の場合、自明
- 累積帰納法は正しくないと仮定
  - 累積帰納法が正しくない最小の値を$n_f > n_0$とする
  - しかし、累積帰納法によって$n_0 \leq m < n_f$が正しいことから$P(n_f)$が導かれ、矛盾する

例：Fibonacci数列

- Fibonacci数列は、以下の漸化式で定義
  - $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
- $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- $f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$
- あるnと$n-1$で正しいと仮定(次シート)

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

再帰的定義

- 可算集合や、可算集合上の関数、関係などを、初期値と再帰手続きで定義するもの
- 集合Sの再帰的定義
  - 初期ステップ:Sの要素をいくつか列挙
  - 再帰ステップ:Sの要素から新しい要素を導出
  - 限定句:上記二つのみで構成することを言明

例：Kleene閉包

- アルファベット(記号)の集合Σから、そのKleene閉包Σ^*を再帰的に定義

- $\forall a \in \Sigma$に対して$a \in \Sigma^*$。また$\epsilon \in \Sigma^*$
- $\forall a \in \Sigma$、$\forall x \in \Sigma^*$に対して$ax \in \Sigma^*$

例：階乗

1. $0! = 1$
2. $n! = n \times (n-1)!, \mathrm{for}\ n \in N$