関係と順序

離散数学・オートマトン

2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

2項関係

- 集合AとBの直積$A \times B$の部分集合R
  - AからBへの2項関係（AからBへの関係）
  - $R: A \to B$
  - $(a, b) \in R$: aとbはRの関係にあるaRb
  - $R(a) = \{b | aRb\}$: aとRの関係にある全体
- $R: A \to A$: Aの上の関係
- 写像、関数との違い

関係の定義域、値域

- $R: X \rightharpoondown Y$
- 定義域X、値域Y

逆関係

- $R^{-1} = \{(b, a) | a \in A, b \in B, aRb\}$
  - BからAへの関係
- $R^{-1}(b) = \{a \in A | aRb\}$
  - $b \in B$とaRbの関係にあるaの全体

例

- $R = \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{a},\mathrm{c}),(\mathrm{b},\mathrm{a}),(\mathrm{c},\mathrm{a})\}$は$X = \{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$上の二項関係
  - $R(\mathrm{a}) = \{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}, R(\mathrm{b}) = R(\mathrm{c}) = \{\mathrm{a}\}$
  - $R^{-1}(\mathrm{a}) = \{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}, R^{-1}(\mathrm{b}) = R^{-1}(\mathrm{c}) = \{\mathrm{a}\}$

例

- 集合X上の包含関係$\subseteq = \{(A, B) | A \subseteq B\}$
  - $\subseteq^{-1}(B) = 2^B$: Bの部分集合の族

関係と関数

- 関係$R: X \to Y$のうち、$\forall x \in X$に対して$|R(x)| = 1$、つまりxに対して一つの$y \in Y$が定まるとき、関数という
  - 関数は、関係の特別な場合

関係の結合

- 集合X、Y、Zに対する関係$R: X \to Y$と$S: Y \to Z$
- 関係の結合$S \circ R: X \to \mathrm{Z}$
  - $S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z | \exists y \in Y, xRy \wedge ySz\}$
- 結合律
  - $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

例

- $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $R = \{(\mathrm{a}, \alpha), (\mathrm{a}, \beta), (\mathrm{b}, \beta), (\mathrm{c}, \gamma)\}$
- $S = \{(\alpha, \mathrm{a}), (\alpha, \mathrm{b}), (\beta, \mathrm{b}), (\gamma, \mathrm{a})\}$
- $S \circ R = \{(x, z) \in A \times A | \exists y \in X, xRy \wedge ySz\} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{b}), (\mathrm{c}, \mathrm{a})\}$

恒等関係、関係のべき乗

- $R: A \to A$
  - $R^0 = \Delta_R = \{(a, a) | a \in A\}$：恒等関係
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$：べき乗

関係の和、共通部分

- 定義域と値域が共通の関係$R, S: A \to B$
  - 和$R \cup S$
  - 共通部分$R \cap S$
- 反射推移閉包: $R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
- 推移閉包: $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

例

- N 上の二項関係nRm: $n = m + 1$
  - $nR^0m \Leftrightarrow n = m$
  - $nR^1m \Leftrightarrow n = m+1$
  - $nR^2m \Leftrightarrow n = m+2$
  - $nR^km \Leftrightarrow n = m + k$
  - $nR^*m \Leftrightarrow \exists k \geq 0, nR^km \Leftrightarrow n \geq m$
  - $nR^+m \Leftrightarrow \exists k > 0, nR^km \Leftrightarrow n > m$

同値関係 (equivalence relation)

- $R: A \to A$
  - 反射律(reflexive): $\forall a \in A$に対してaRa
  - 対称律(symmetric): $\forall a, b \in A$に対して $aRb \Leftrightarrow bRa$
  - 推移律(transitive): $\forall a, b, c \in A$に対して $aRb \land bRc \Leftrightarrow aRc$
- 三つの性質を全て満たす: 同値関係

例:mを法とする合同

- $R = \{(x, y) | x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)\}$
  - $x, y \in N \cup \{0\}$を$m \in N$で除した余りが等しい
- 反射律:xRxは自明
- 対称律:$xRy = yRx$も自明
- 推移律:$xRy, yRz \Rightarrow xRz$
  - $k, l \in Z$が存在し、$x - y = km, y - z = lm$。従って$x - z = (k + l)m$

同値類
equivalence class

- 集合A上の同値関係Rによって、集合Aを分ける
- $a \in A$に対して$[a]_R = \{b \in A | aRb\}$
  - Rによって定まるaと同値なものの全体
  - aを代表元という

同値類の性質

- 集合A上の同値関係R
- $\forall a, b, c \in A$
  1. $a \in [a]_R$
  2. $b, c \in [a]_R \Rightarrow bRc$
  3. $aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$
  4. $[a]_R = [b]_R$と$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$のいずれか一方だけが必ず成り立つ
  5. $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

例: mを法とする剰余類

- $R = \{(x, y) | x \equiv y \pmod{m}\}$
- m=3の場合: $A = N \cup \{0\}$
  - $[0] = 3k$
  - $[1] = 3k+1$
  - $[2] = 3k+2$
  - $k \in N$

順序(order)

- 反対称律(anti-symmetric)
  - $\forall a, b \in A$に対して、$aRb \land bRa \Rightarrow a = b$
- 大小関係≤は、反射律、推移律、反対称律を満たす
  - 半順序(partial order)または順序という
- 半順序集合 : 半順序を定義された集合

全順序 (total order)

- 全順序:半順序に加えて、任意の二つの要素について比較可能であるとき
- 全順序集合:全順序を定義された集合

例(A, R)

- 自然数、整数、有理数、実数に対する大小関係$\leq$は、全順序
- 集合の包含関係$\subseteq$は、半順序

例: $n, m \in N$に対する関係「$n|m$: nはmを割り切る」は、半順序

- 反射律: $n|n$は自明
- 推移律: $n|m \wedge m|l \Rightarrow n|l$
  - $(n|m \Rightarrow m = an, m|l \Rightarrow l = bm) \Rightarrow l = bm = abn$
- 反対称律: $n|m \wedge m|n \Rightarrow m = an \wedge n = bm \Rightarrow a = b$
- n, mが互いに素の場合には、関係が成り立たないため、全順序ではない