論理とブール代数

離散数学・オートマトン

2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

命題論理
propositional logic

- 論理変数:TまたはFしか取らない変数
- 命題論理:論理変数を論理演算で結んだもの

©Shin-ichi TADAKI

論理式の再帰的定義

1. $a \in \{T, F\} \Rightarrow a$は論理式
2. Aは論理変数$\Rightarrow A$は論理式
3. $\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$が論理式$\Rightarrow (\neg\mathcal{A}), (\mathcal{A} \land \mathcal{B}), (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}), (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}), (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$は論理式

$(\neg\mathcal{A})$:否定、$(\mathcal{A} \land \mathcal{B})$:合接・論理積、
$(\mathcal{A} \lor \mathcal{B})$:離接・論理和

©Shin-ichi TADAKI

論理関数 Logical/Boolean function

- 論理変数$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$を変数とする述語: $\mathcal{A}(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}) \to \{T, F\}$
- 付値: $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$に具体的な値を定めること
  - $\sigma(\mathcal{A})$: ある付値σに対する$\mathcal{A}$の値
- 恒等式 (tautology) : $\vDash \mathcal{A}$
  - $\forall \sigma, \sigma(\mathcal{A}) = T$
- $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = T$: $\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$は同値

©Shin-ichi TADAKI

命題論理の性質 A, B, Cは命題変数

- 巾等律: $A \wedge A \equiv A, A \vee A \equiv A$
- 可換律: $A \wedge B \equiv B \wedge A, A \vee B \equiv B \vee A$
- 結合律: $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
  $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- 分配律: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

©Shin-ichi TADAKI

- 吸収律: $(A \land B) \lor A \equiv A$,
  $(A \lor B) \land A \equiv A$
- de Morgan: $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$,
  $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$
- 二重否定: $\neg(\neg A) \equiv A$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$
- $A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$
- $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

©Shin-ichi TADAKI

- 排中律: $A \vee \neg A \equiv T$
- 矛盾律: $A \wedge \neg A \equiv F$
- 三段論法: $\vDash \left((A \to B) \wedge (B \to C)\right) \to (A \to C)$
- $A \vee T \equiv T, A \wedge T \equiv A,$
  $A \vee F \equiv A, A \wedge F \equiv F$

©Shin-ichi TADAKI

標準形

- NAND: $A \uparrow B \equiv \neg(A \wedge B)$
- NOR: $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B)$
- 任意の論理式と同値な以下の論理式が存在
  1. ¬と∧しか含まない
  2. ¬と∨しか含まない
  3. ¬と→しか含まない
  4. ↑しか含まない
  5. ↓しか含まない

©Shin-ichi TADAKI

標準形：証明

1. $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$
2. $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$
3. $p \wedge q \equiv (\neg\neg p) \vee q \equiv \neg p \to q,$
   $p \vee q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \to \neg q)$

©Shin-ichi TADAKI

標準形:証明

$4.\ \neg p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv p \uparrow p,$

$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg\big((p \uparrow p) \wedge (q \uparrow q)\big) \equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

$p \wedge q$は、2を使用

©Shin-ichi TADAKI

標準形：証明

5. $\neg p \equiv \neg(p \vee p) \equiv p \downarrow p,$

$p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$p \vee q$は、1を使用

©Shin-ichi TADAKI

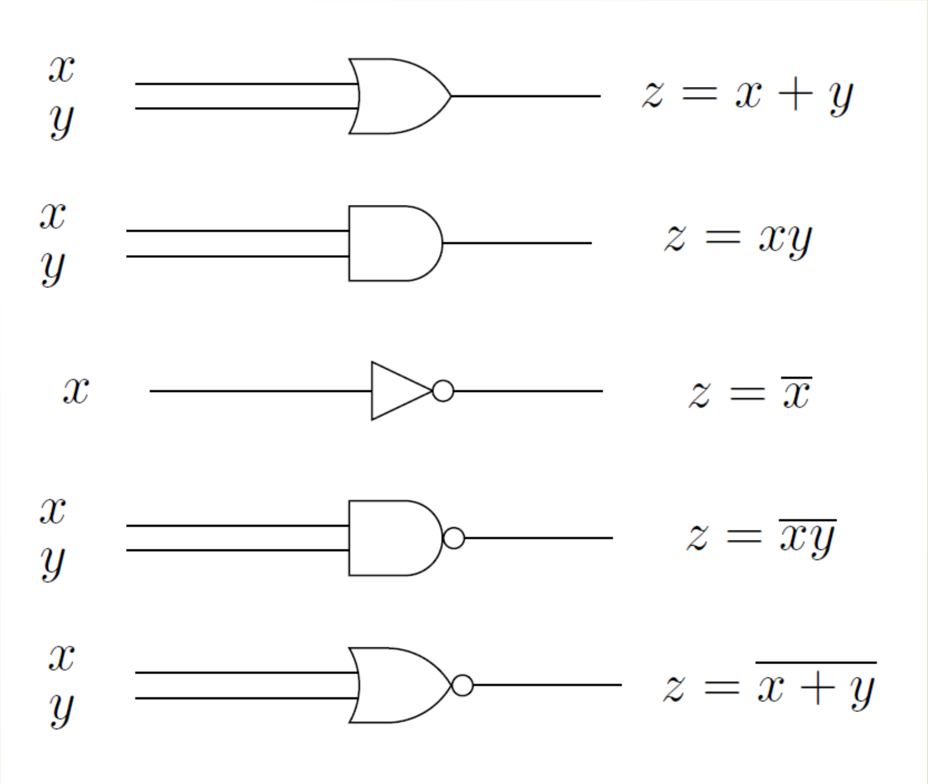
ブール代数

- 1ビットに対して、$0 \to F, 1 \to T$という対応を付ける
  - {0,1}:ブール変数
  - $+ \leftrightarrow \vee, \cdot \leftrightarrow \wedge, \overline{} \leftrightarrow \neg$
- 基本積
  - 同じ変数を一回のみ含む積

©Shin-ichi TADAKI

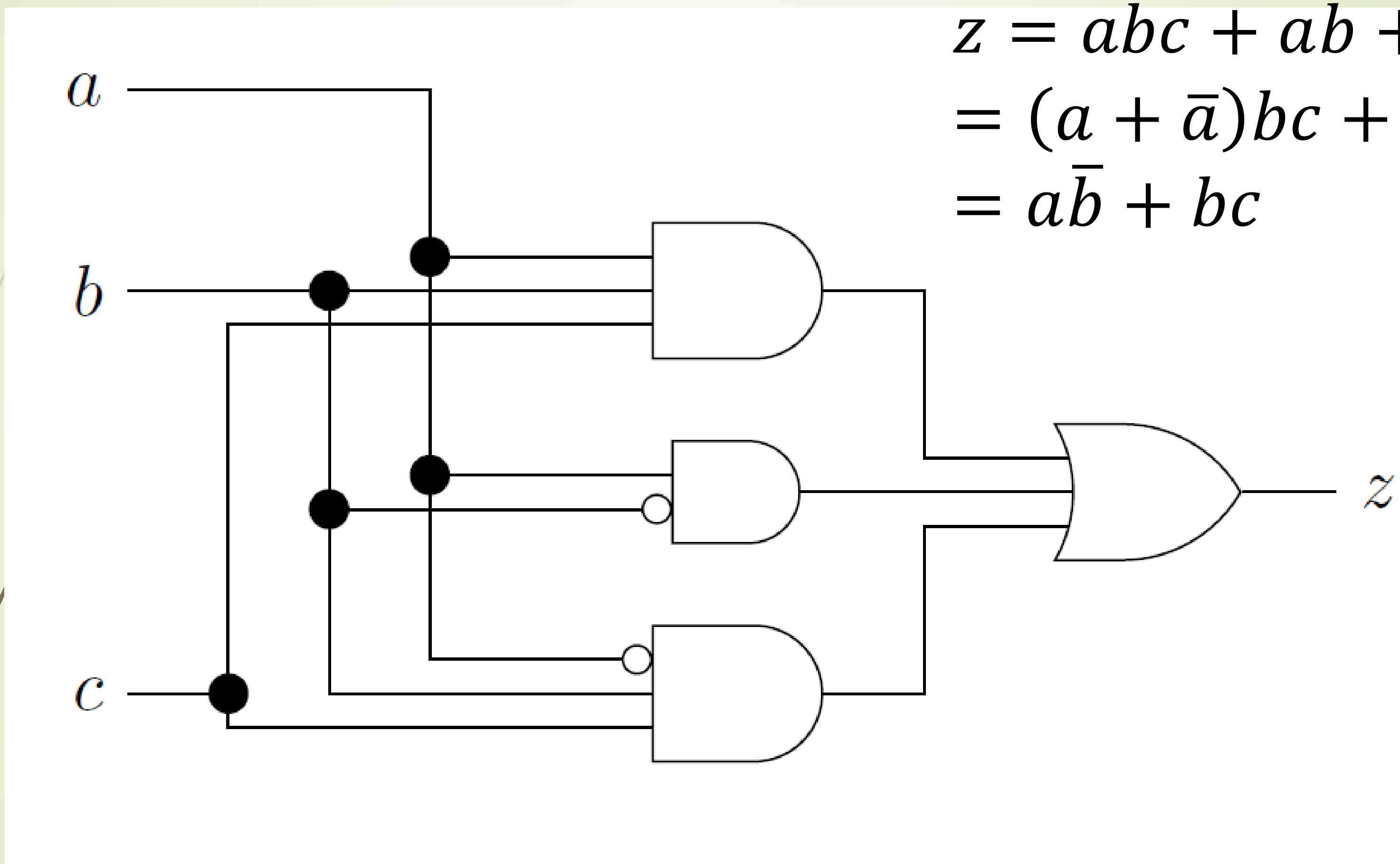
論理回路

- ブール代数に対応した回路



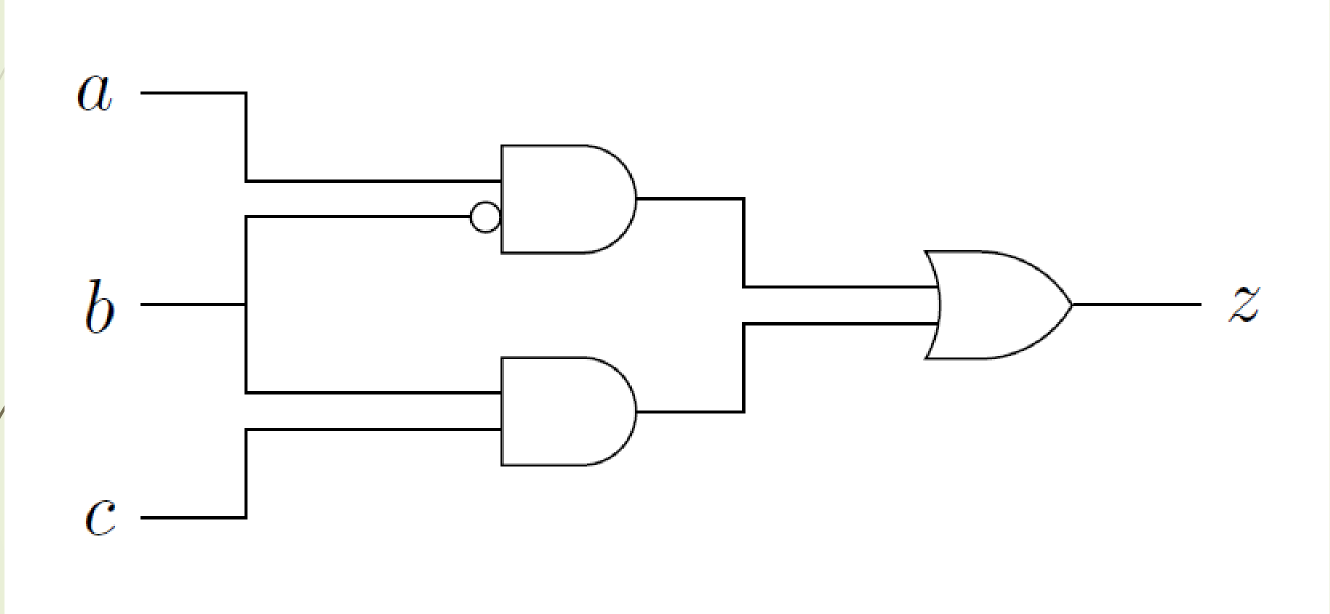
©Shin-ichi TADAKI

より少数の基本積へ

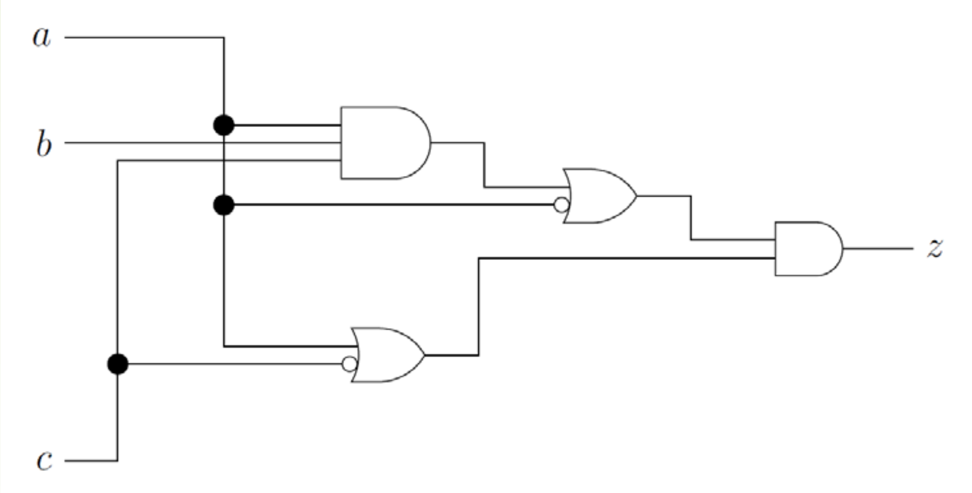


$$z = abc + a\bar{b} + \bar{a}bc$$
$$= (a + \bar{a})bc + a\bar{b}$$
$$= a\bar{b} + bc$$

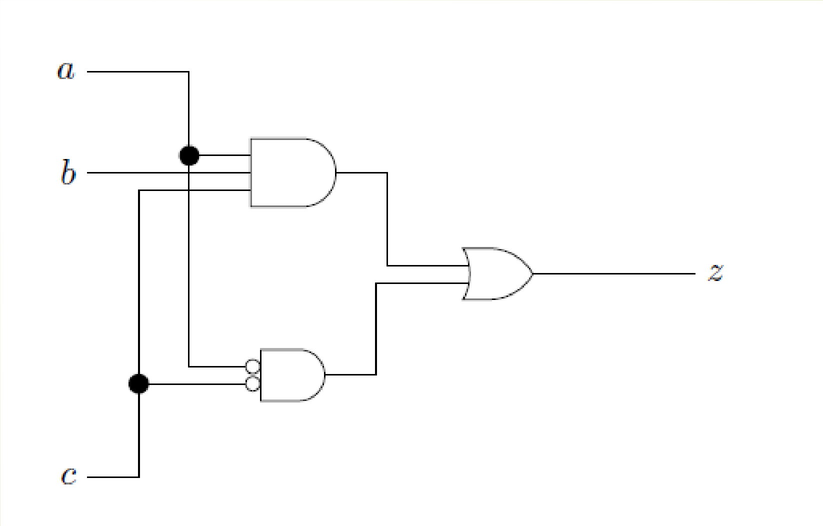
©Shin-ichi TADAKI



©Shin-ichi TADAKI



$$z = (abc + \bar{a})(a + \bar{c})$$
$$= aabc + abc\bar{c} + a\bar{a} + \bar{a}\bar{c}$$
$$= abc + 0 + 0 + \bar{a}\bar{c}$$
$$= abc + \bar{a}\bar{c}$$



©Shin-ichi TADAKI

カルノー図
Karnaugh maps

- ブール表現を最小化する道具
- 各区画は、基本積
- 隣接する区画の基本積は一文字違い
- 隣接する区画をまとめる

©Shin-ichi TADAKI

2変数カルノー図

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

$$E = xy + x\bar{y}$$
$$= \mathrm{x}(\mathrm{y} + \bar{\mathrm{y}})$$
$$= \mathrm{x}$$

	y	$\bar{y}$
x	✓	✓
$\bar{x}$		

$$E = xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$$
$$= xy + \bar{x}y + \bar{\mathrm{x}}y + \bar{x}\bar{y}$$
$$= (x + \bar{x})y + \bar{x}(y + \bar{y})$$
$$= \bar{x} + y$$

	y	$\bar{y}$
x	✓	
$\bar{x}$	✓	✓

©Shin-ichi TADAKI

3変数カルノー図

	$\boldsymbol{yz}$	$\boldsymbol{y\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{y}\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{y}z}$
$\boldsymbol{x}$	xyz	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$
$\boldsymbol{\bar{x}}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$
\begin{aligned}
z &= xyz + xy\bar{z} \\
&= xy(z + \bar{z}) \\
&= xy
\end{aligned}
$$

	$\boldsymbol{yz}$	$\boldsymbol{y\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{y}\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{y}z}$
$\boldsymbol{x}$	✓	✓		
$\boldsymbol{\bar{x}}$				

$$
\begin{aligned}
E &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= x(y + \bar{y})\bar{z} + \bar{x}(y + \bar{y})\bar{z} \\
&= x\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = (x + \bar{x})\bar{z} = \bar{z}
\end{aligned}
$$

	$\boldsymbol{yz}$	$\boldsymbol{y\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{y}\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{y}z}$
$\boldsymbol{x}$		✓	✓	
$\boldsymbol{\bar{x}}$		✓	✓	

©Shin-ichi TADAKI