最短経路

離散数学・オートマトン

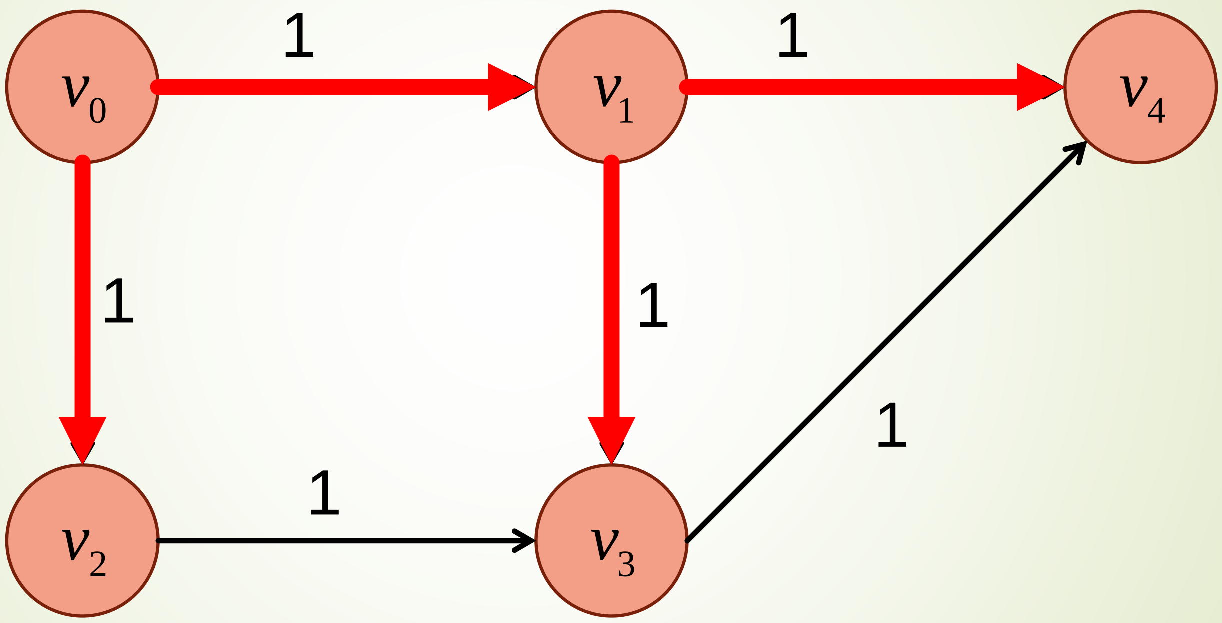
2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

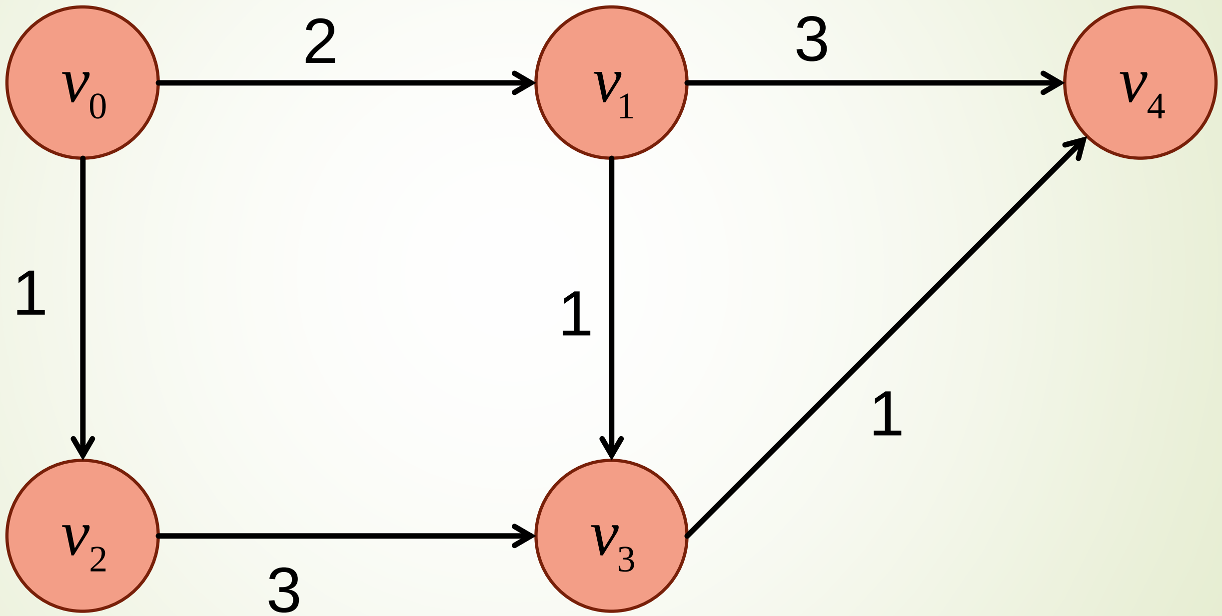
最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
  - 各辺に距離・コスト (正の実数)
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
  - 辺の向きがそろった道
- 距離・コストの組み合わせ最適化問題

すべての弧の距離が同じならば幅優先探索で十分

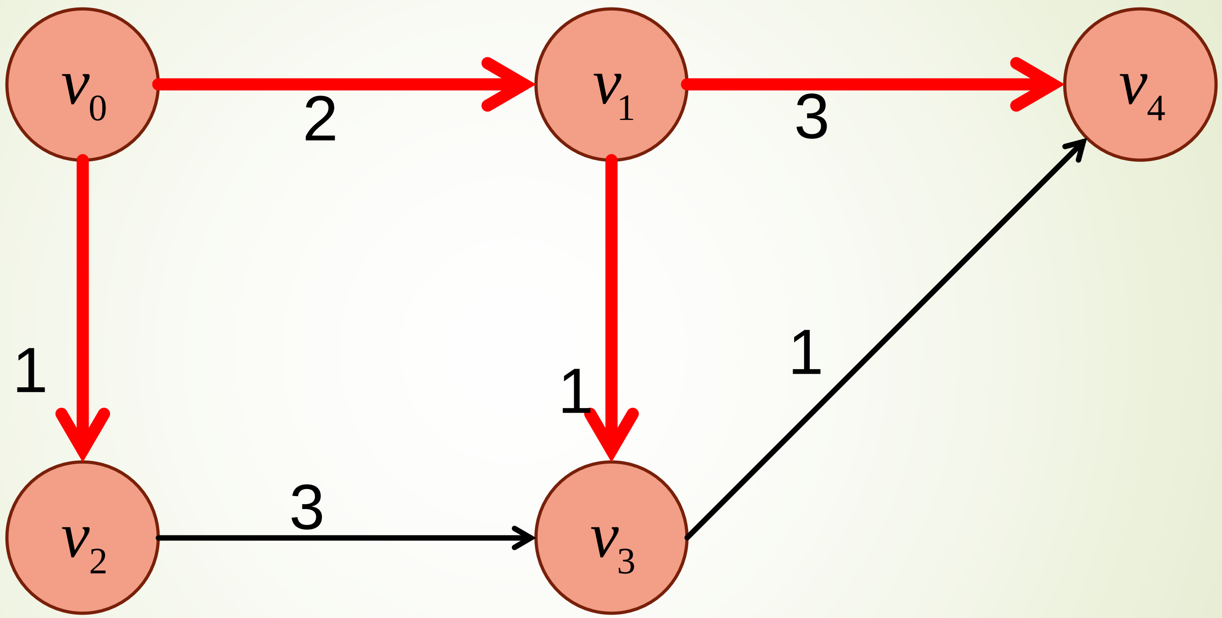


幅優先探索ではダメな理由



弧の長さがばらばらの値

幅優先探索では



- v_4 への経路が$v_0 \to v_1 \to v_4$となり、距離が5
- しかし、経路$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_4$のほうが距離4
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

Dijkstra法：初期化

$p(v)$：始点から頂点vへの距離
$q(v)$：始点から頂点vへ経路の、vの一つ前の頂点
$l(e)$：辺eの長さ

$$U = \{v_0\}$$
$$W = \emptyset$$
$$p(v_0) = 0$$
$$p(u) = +\infty(\forall u \in V \setminus \{v_0\})$$
$$q(v) = \mathrm{NULL}(\forall u \in V)$$

Uを$p(w)$によるヒープとして実装すると効率的

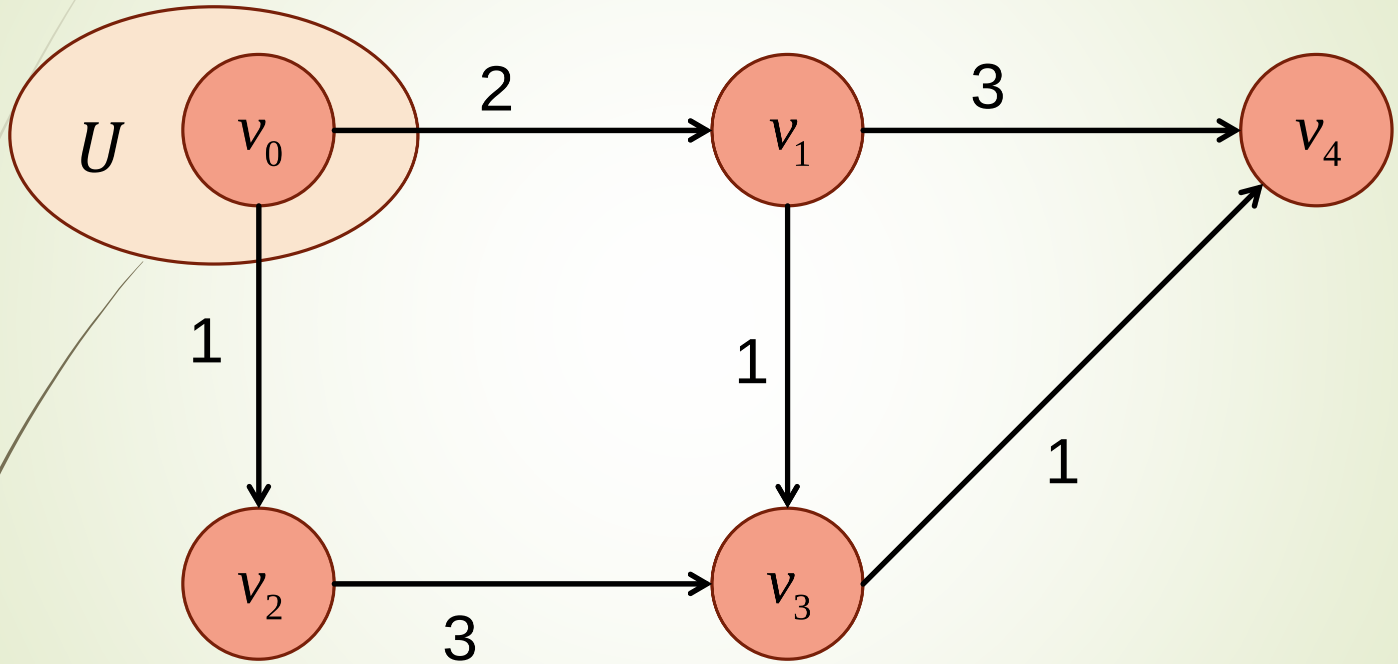
Dijkstra法：アルゴリズム

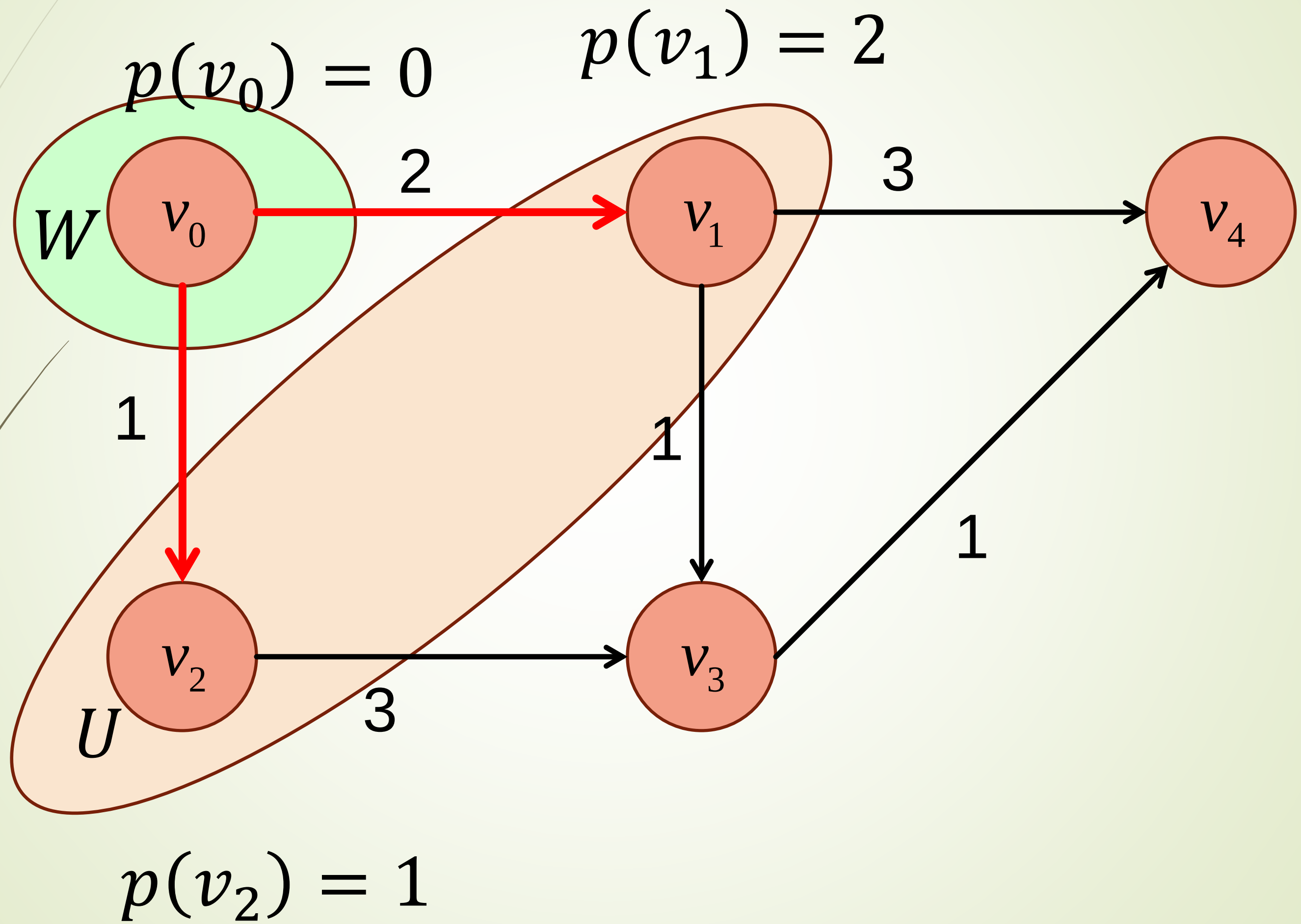
while ($U \neq \emptyset$) {
    $w = U.\mathrm{poll}()$ //$p(w)$が最小である$w \in U$
    forall ($e \in \delta^{+}w$) {
        $x = \partial^{-}e$ //wの隣接頂点
        if ($p(x) > p(w) + l(e)$) {//eを使ったほうが近距離
            $q(x) \leftarrow w$
            $p(x) \leftarrow p(w) + l(e)$
            if ($x \in U$) { $U.\mathrm{reduceValue}(x)$ //xの値を変更}
            else { $U.\mathrm{add}(x)$ //Uにxを追加}
    }}
    $W \leftarrow W \cup \{w\}$
}

ヒープ中の*p*(*x*)の値が
減ることがあることに注意

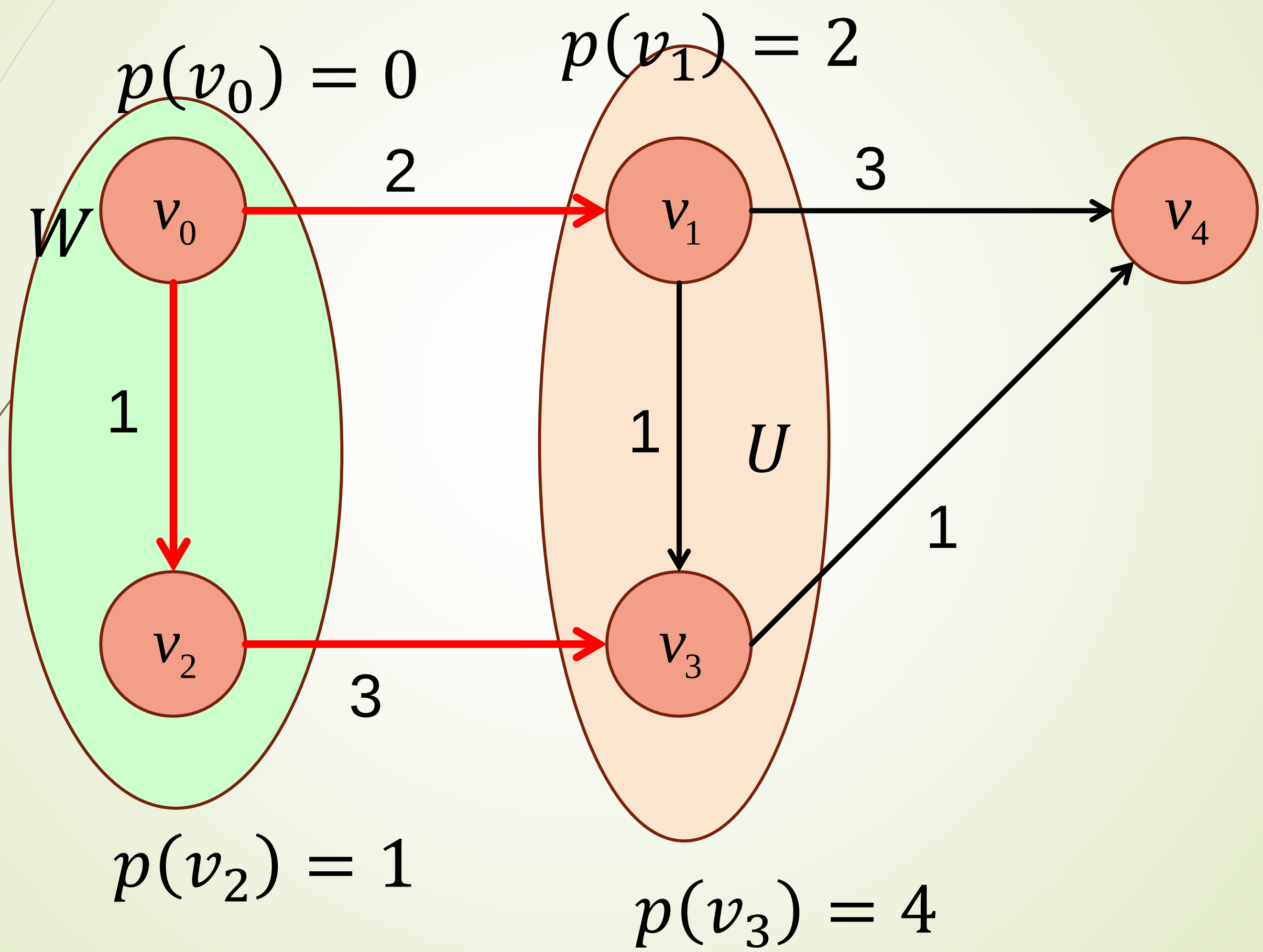
例1

$p(v_0) = 0$

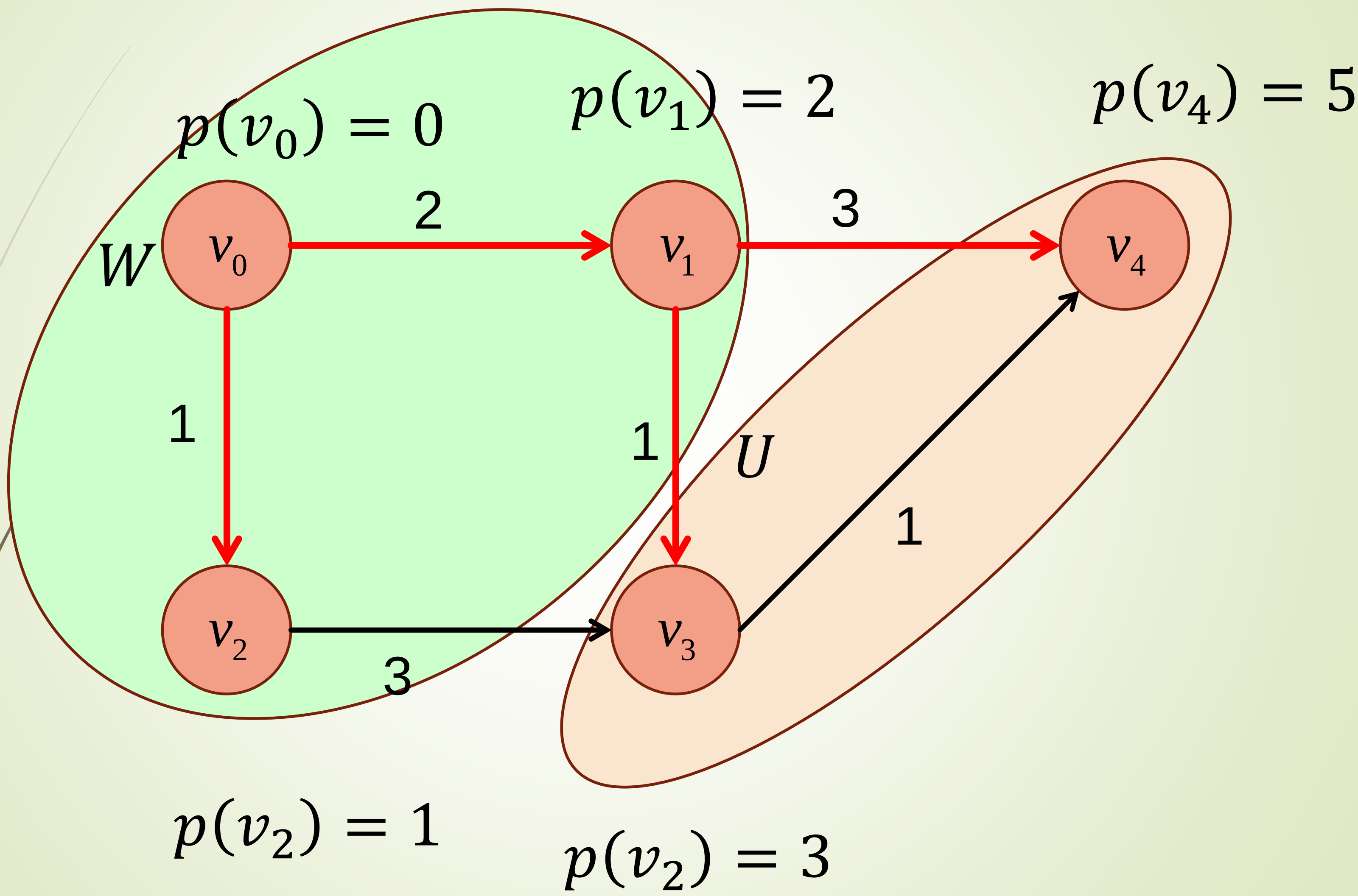




$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
v_2
v_3
U
3
$p(v_2) = 1$

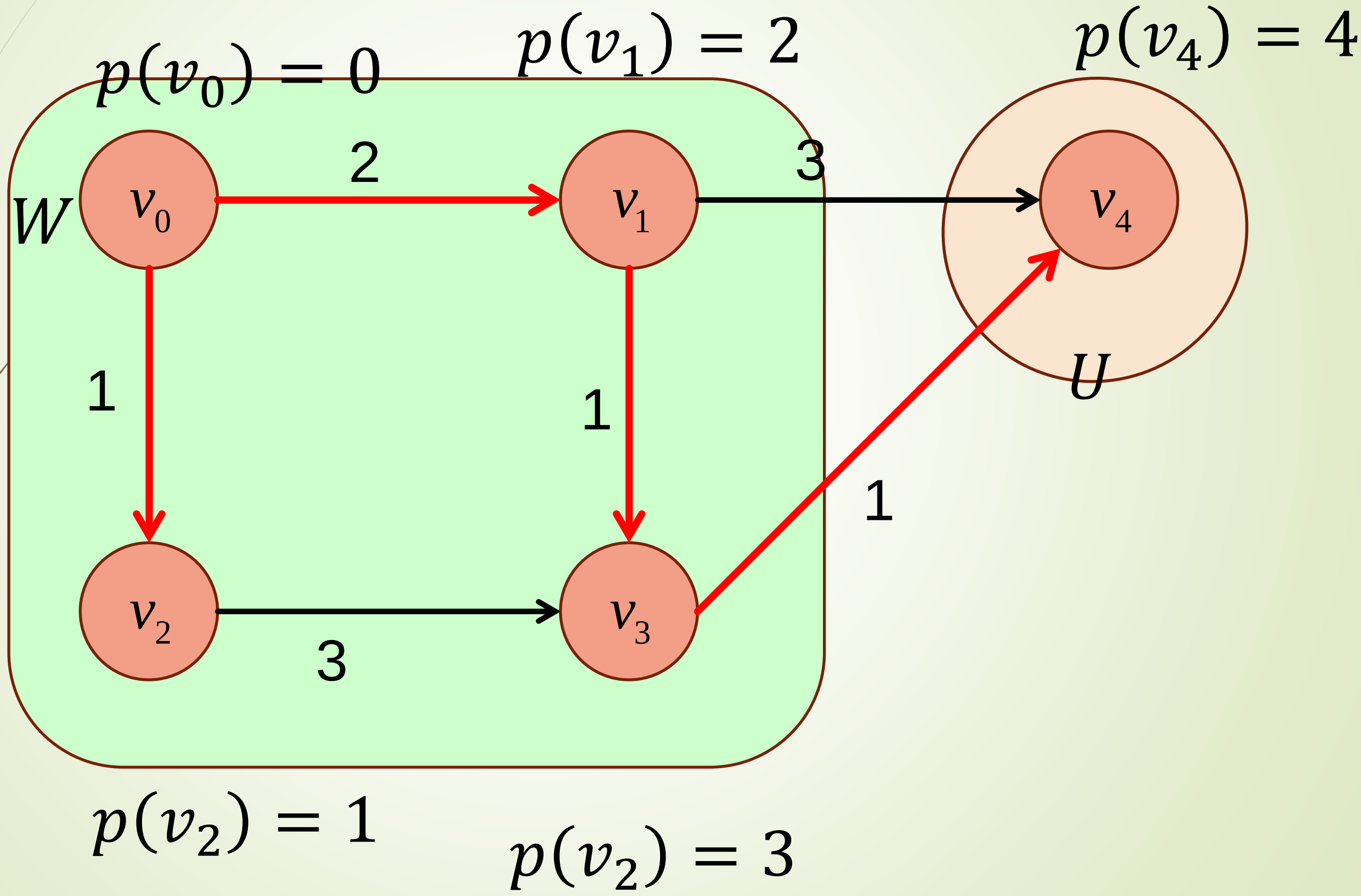


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
U
1
v_2
v_3
3
$p(v_2) = 1$
$p(v_3) = 4$



ここが更新されている

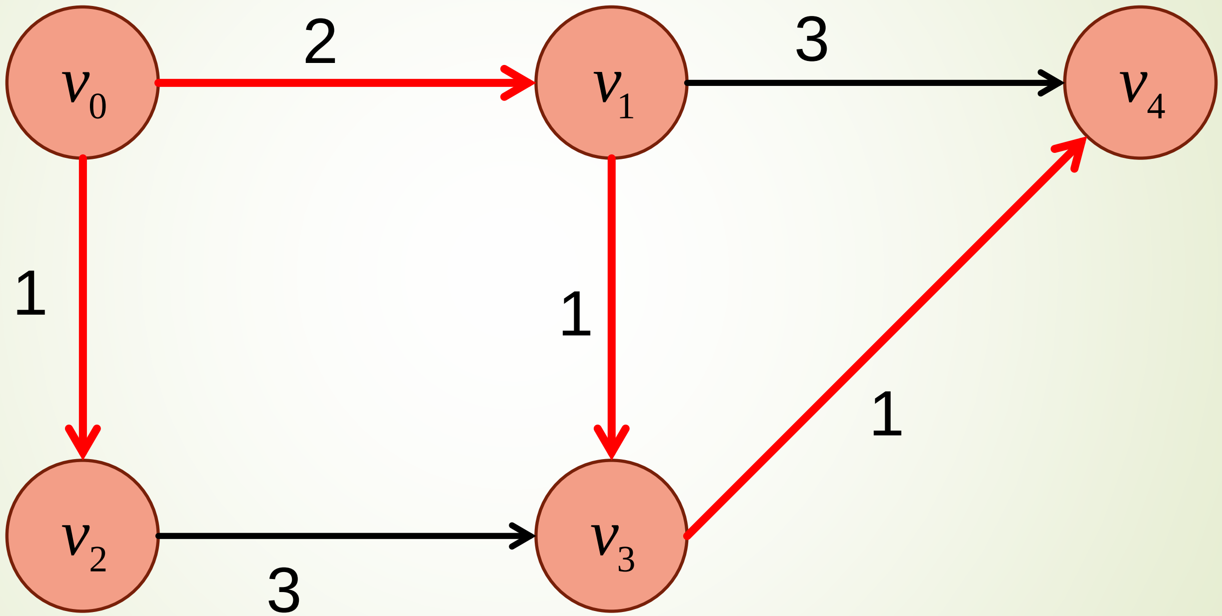
ここが更新されている



$p(v_0) = 0$

$p(v_1) = 2$

$p(v_4) = 4$



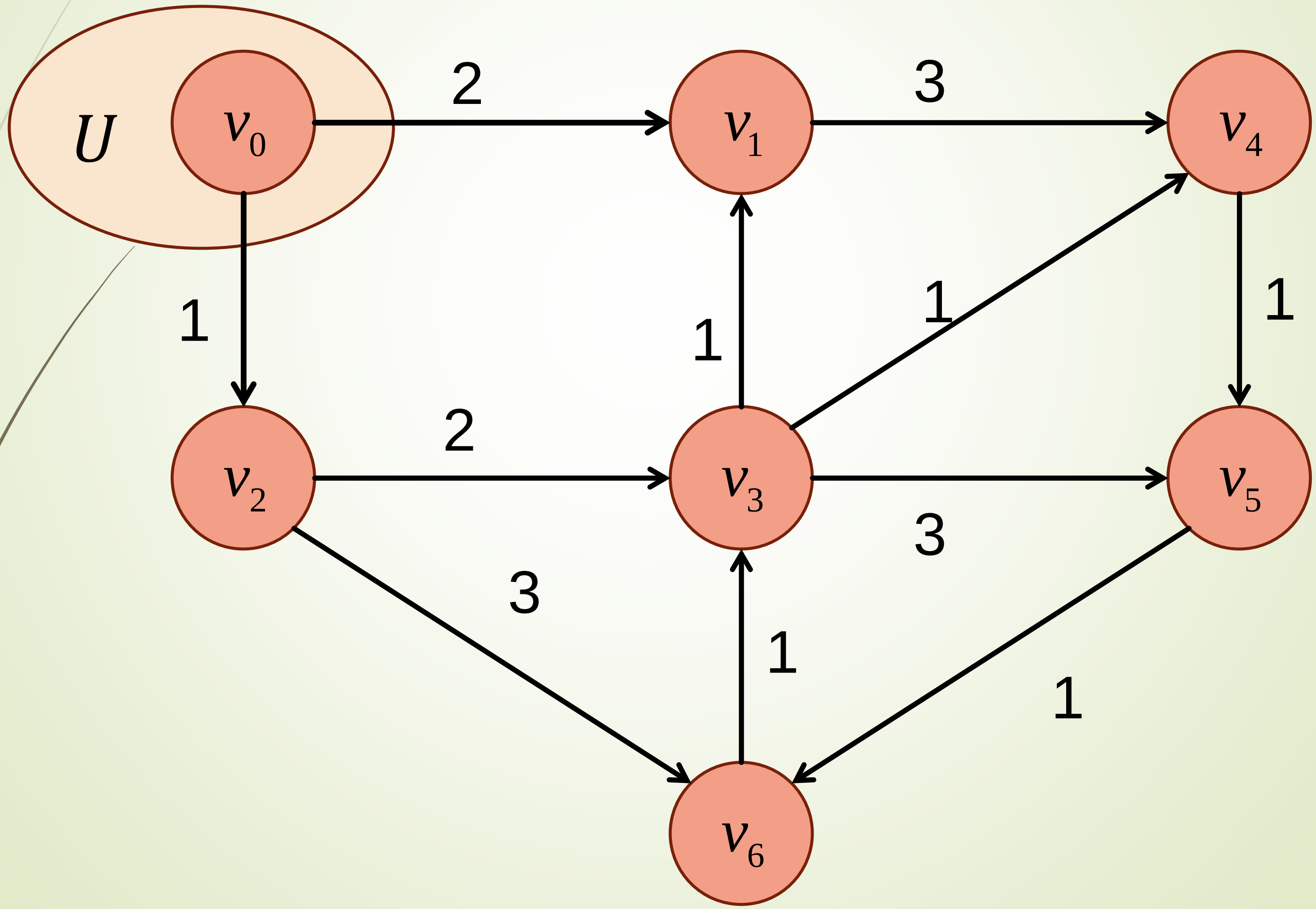
$p(v_2) = 1$

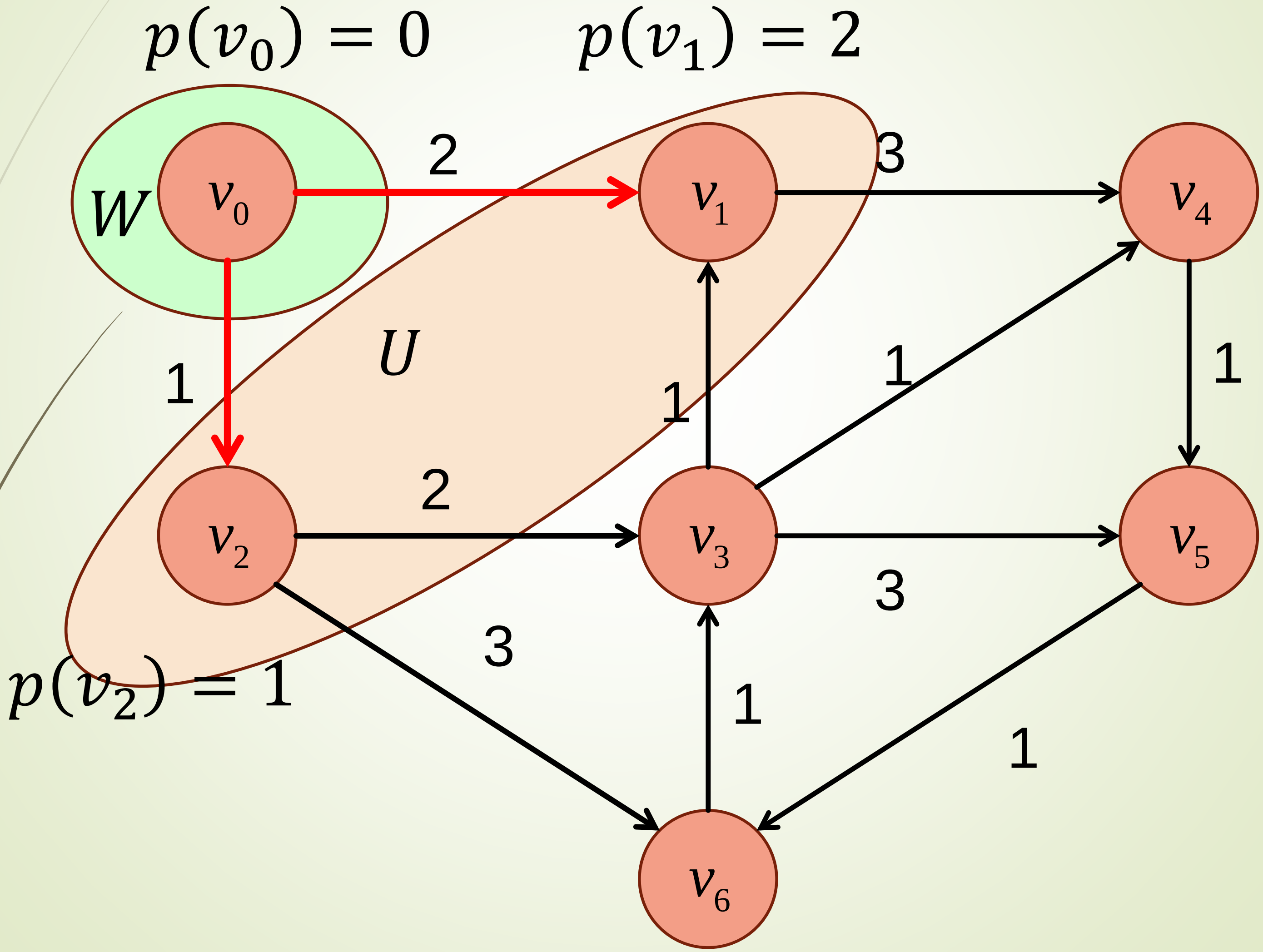
$p(v_2) = 3$

	注目している頂点	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	変更を受けた手順
0		$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_2) = 1$	$q(v_2) = v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3) = 4$	$q(v_3) = v_2$	3
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_4) = 5$	$q(v_4) = v_1$	4
				$p(v_3) = 3$	$q(v_3) = v_1$	
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_3$	
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$	$\emptyset$			

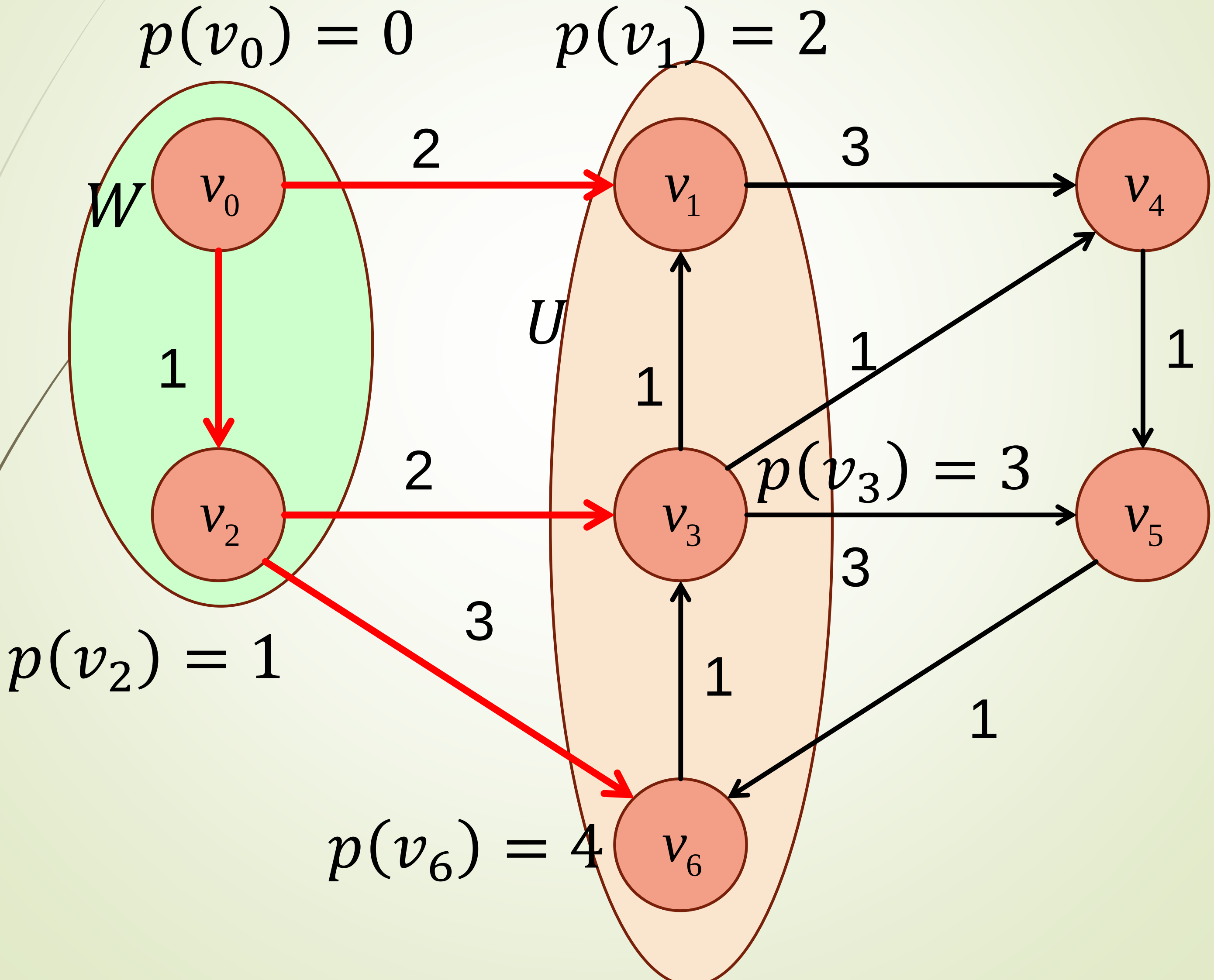
例2

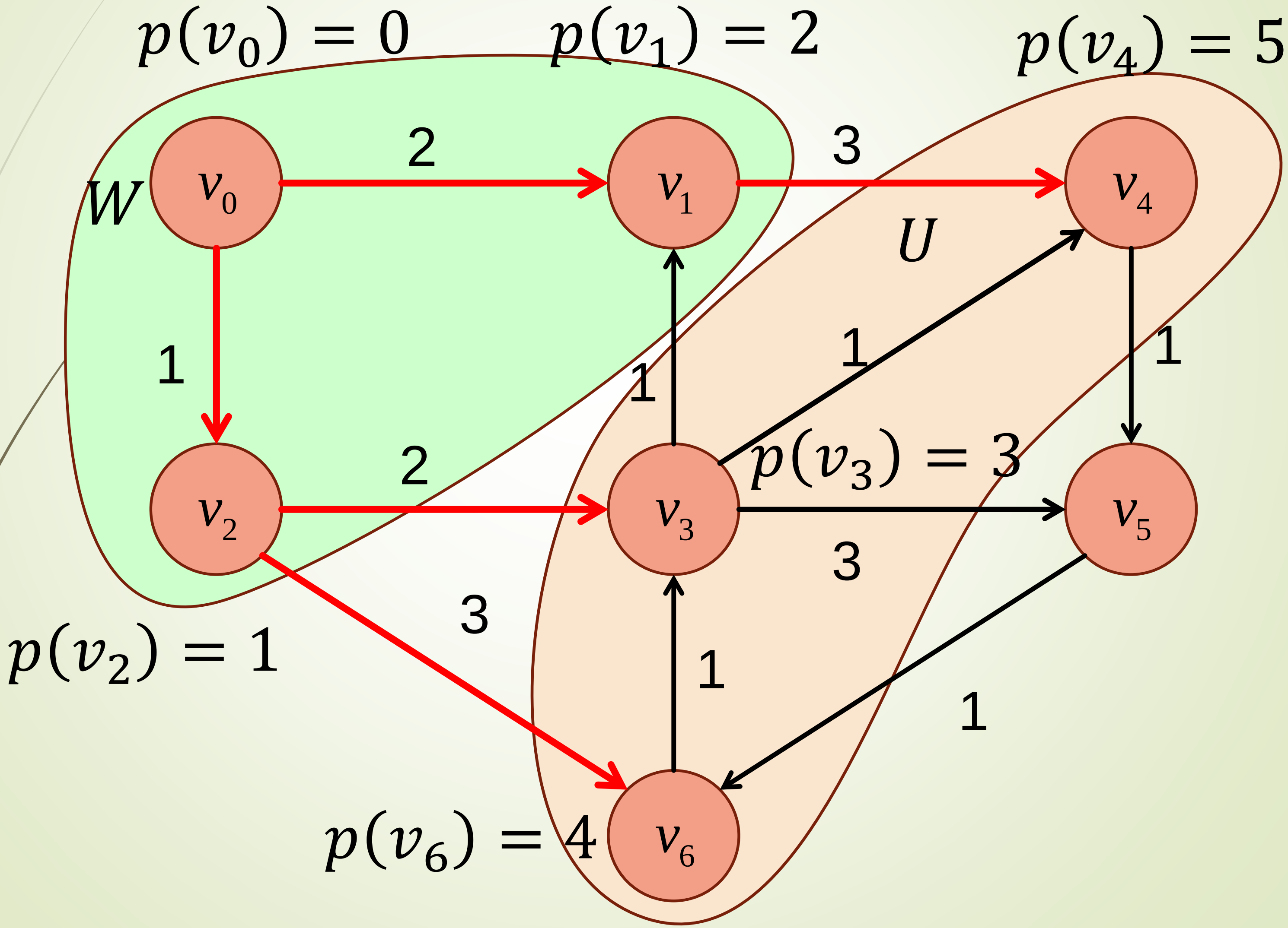
$p(v_0) = 0$



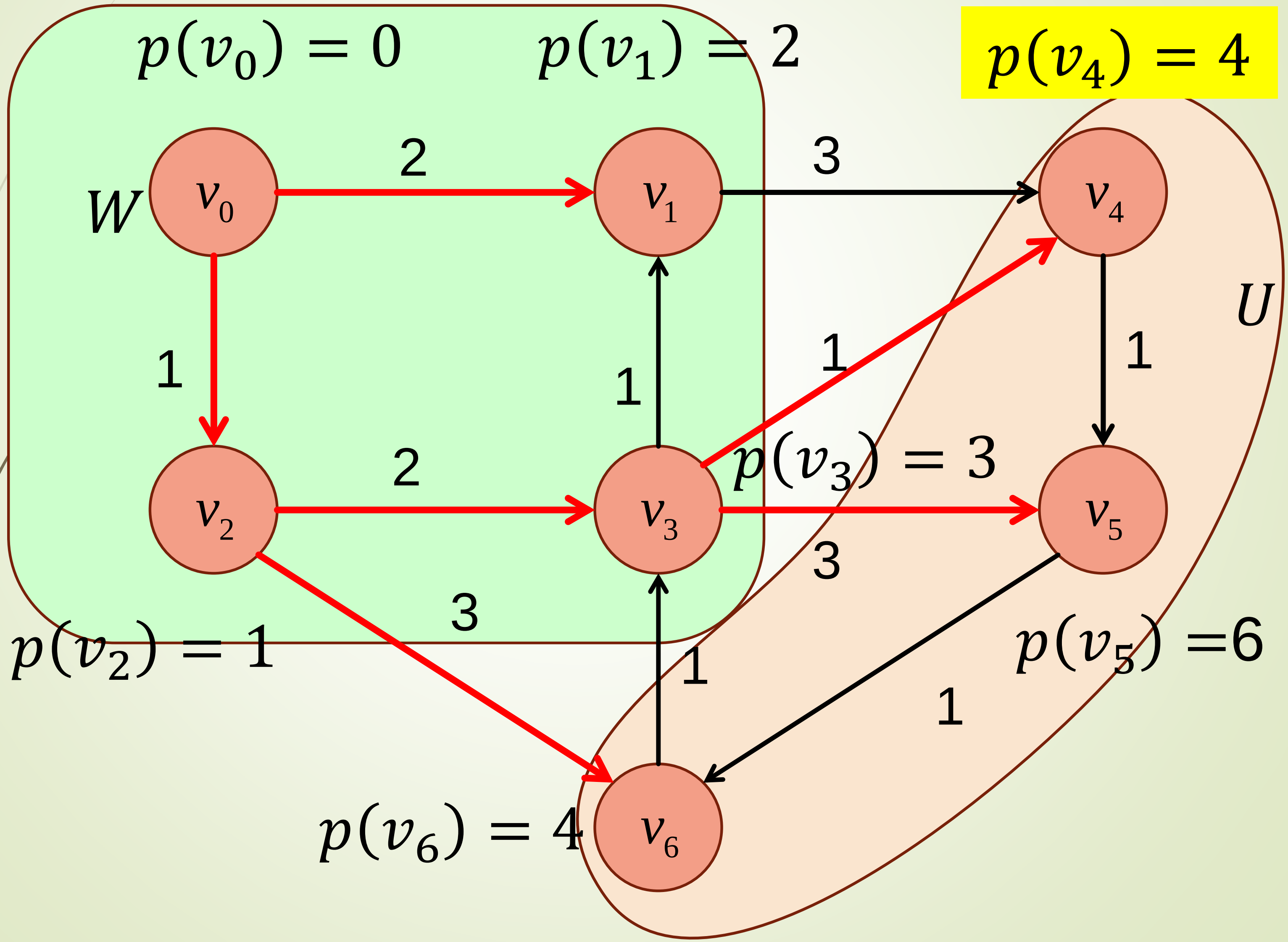


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_2) = 1$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
2
3
1
1
1
1
2
3
3
1
1

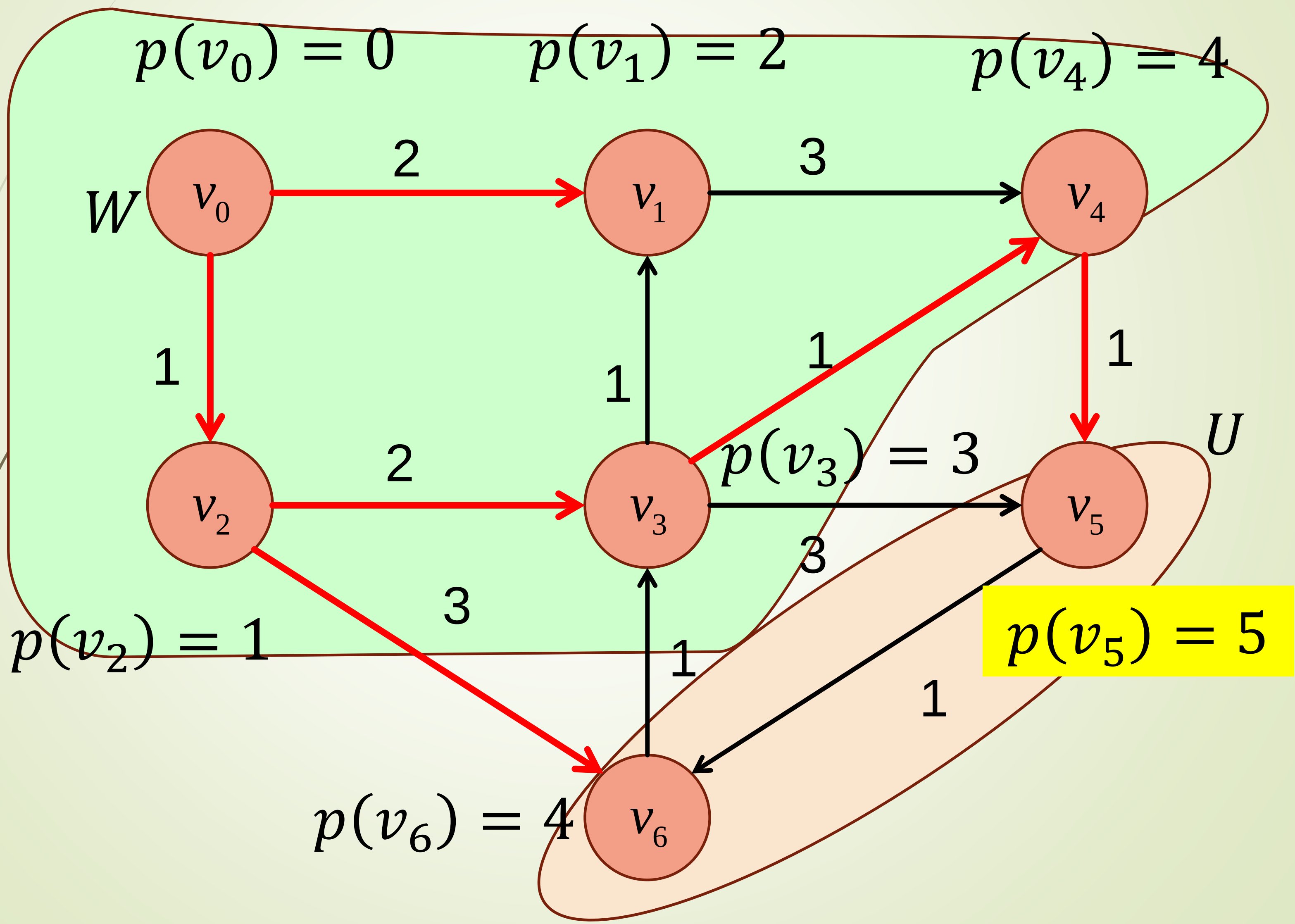

$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
2
3
1
1
1
1
2
3
3
1
1
$p(v_3) = 3$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 4$

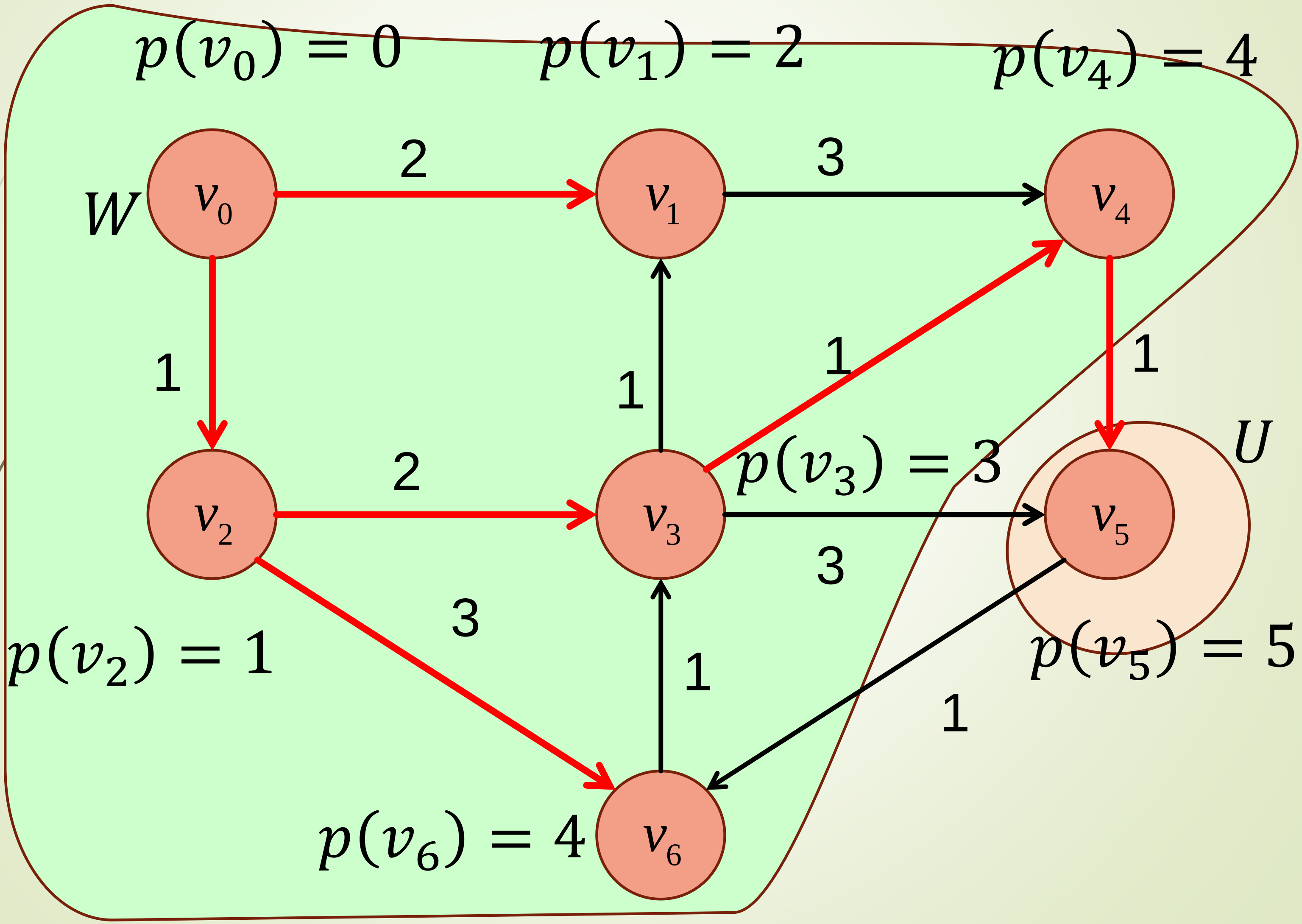


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 5$
W
U
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
v_5
v_6
2
3
1
1
1
1
2
$p(v_3) = 3$
3
3
1
1
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 4$

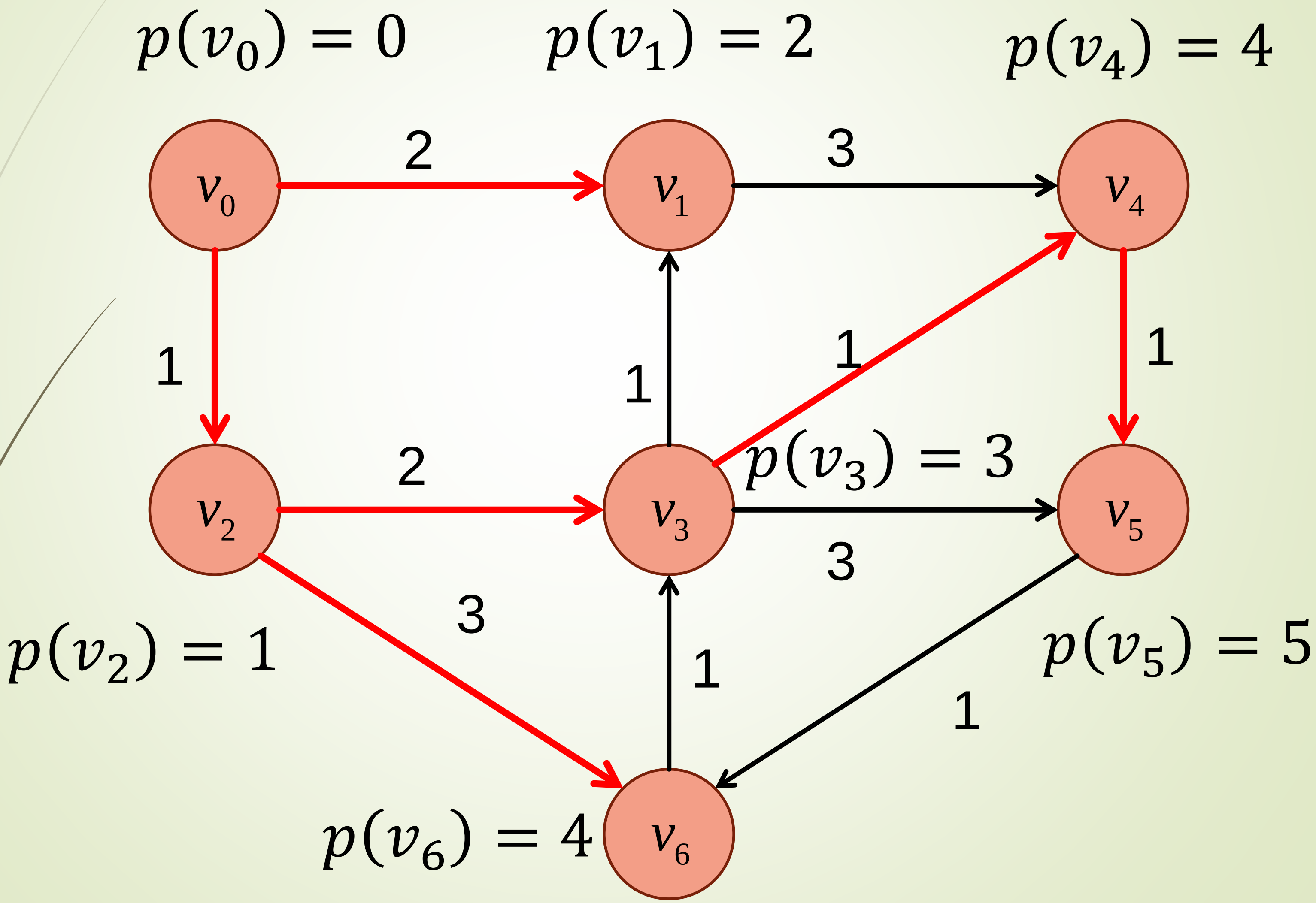


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
W
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
v_5
v_6
U
2
3
1
1
1
1
2
3
3
1
1
$p(v_3) = 3$
$p(v_2) = 1$
$p(v_5) = 6$
$p(v_6) = 4$


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
W
v_0
v_1
v_4
2
3
1
1
1
1
U
$p(v_3) = 3$
v_2
v_3
v_5
2
3
3
$p(v_5) = 5$
$p(v_2) = 1$
1
1
$p(v_6) = 4$
v_6



$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
1
U
v_2
2
v_3
$p(v_3) = 3$
v_5
3
3
$p(v_2) = 1$
1
$p(v_5) = 5$
1
$p(v_6) = 4$
v_6


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
v_0
v_1
v_4
v_2
v_3
v_5
v_6
2
3
1
1
1
1
2
$p(v_3) = 3$
3
3
1
1
$p(v_2) = 1$
$p(v_5) = 5$
$p(v_6) = 4$

	注目している頂点	w	U	p	q	変更を受けた手順
0		$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_2) = 1$	$q(v_2) = v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3, v_6\}$	$p(v_3) = 3$	$q(v_3) = v_2$	
				$p(v_6) = 4$	$q(v_6) = v_2$	
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_6\}$	$p(v_4) = 5$	$q(v_4) = v_1$	4
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$	$p(v_5) = 6$	$q(v_5) = v_3$	5
				$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_3$	
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6\}$	$p(v_5) = 5$	$q(v_4) = v_3$	
6	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$	$\{v_5\}$			
7	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$	$\emptyset$			

Dijkstra法の正当性 証明概要

- 補題1：頂点は、始点からの距離が短い順にWに入る。また、Wに入った頂点の距離を更新することはない
- 補題2：U及びWに属する頂点には、始点からの経路があり、その時点で最短である。

補題1

- Dijkstra法の実行に伴って、頂点が$v_0, v_1, v_2, \cdots$の順に集合Wに追加されるとする
  - 頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le p(v_2) \le \cdots \le p(v_i) \le p(v_{i+1}) \le \cdots$$

- つまりWには、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、Wに入った頂点vに対する$p(v)$が後から更新されることはない。

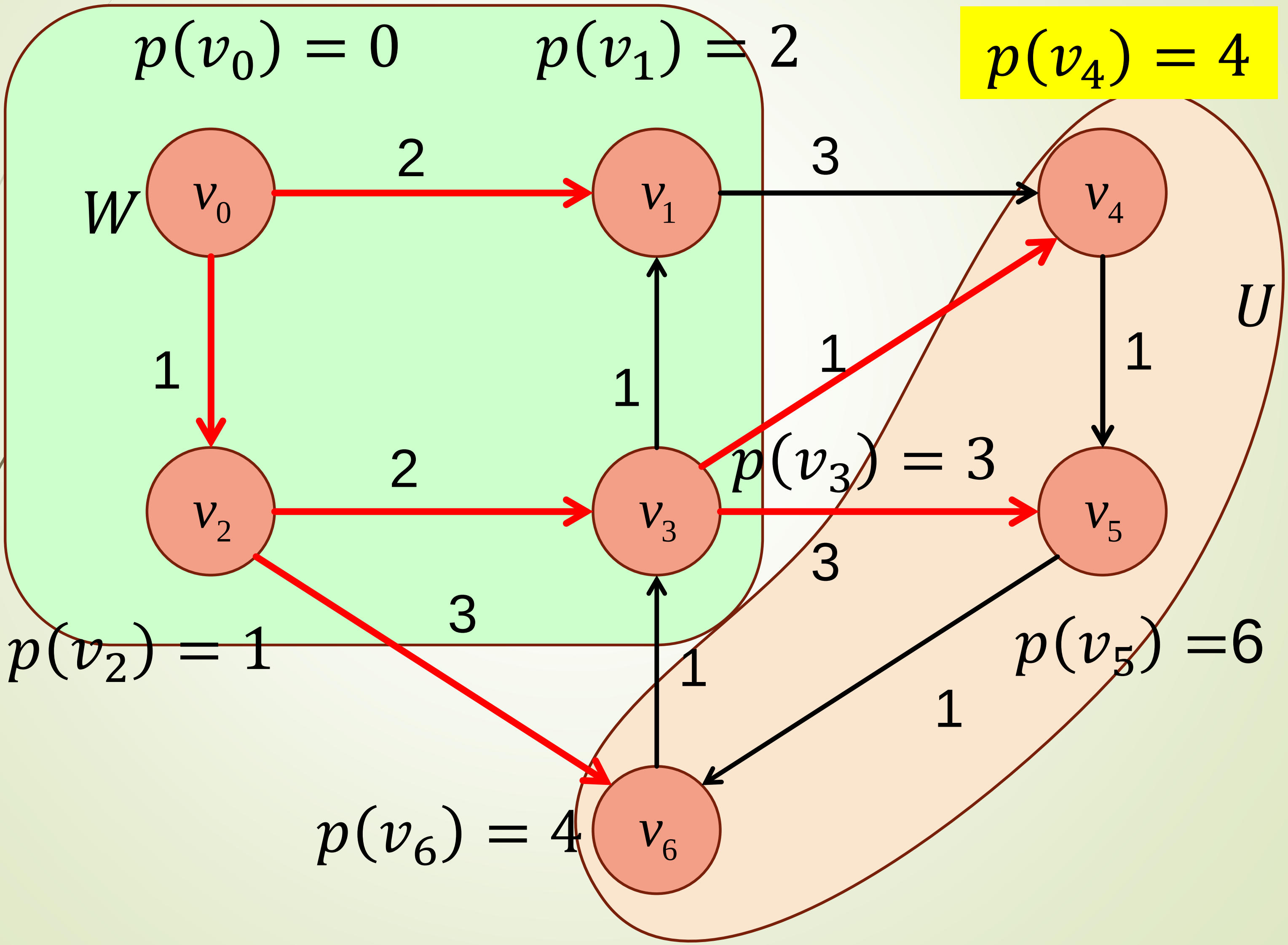
26

補題1が正しいこと

- Dijkstra法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す
  - Wの要素である頂点への距離は、Wの要素でない任意の頂点への距離より大きいことはない

$$\max\{\, p(u) \mid u \in W \,\} \le \min\{p(u) \mid u \in V \setminus W\}$$

- $\forall v \in U \subseteq V \setminus W$に対して$p(v) \ge p(u), \forall u \in W$
  - $p(v)$を更新することはない



$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
W
v_0
v_1
v_4
2
3
1
1
1
1
U
v_2
v_3
v_5
2
$p(v_3) = 3$
3
3
$p(v_2) = 1$
1
$p(v_5) = 6$
1
$p(v_6) = 4$
v_6

補題2

- U及びWに属する頂点には、始点からの最短経路がある

補題2が正しいこと

- U及びWに属する頂点には、始点からの最短経路がある: 自明
- Wに属する頂点は、より短い経路が見つかる度に更新$\rightarrow$やがてUに入り、距離確定