非決定性有限オートマトンと決定性有限オートマトン

離散数学・オートマトン

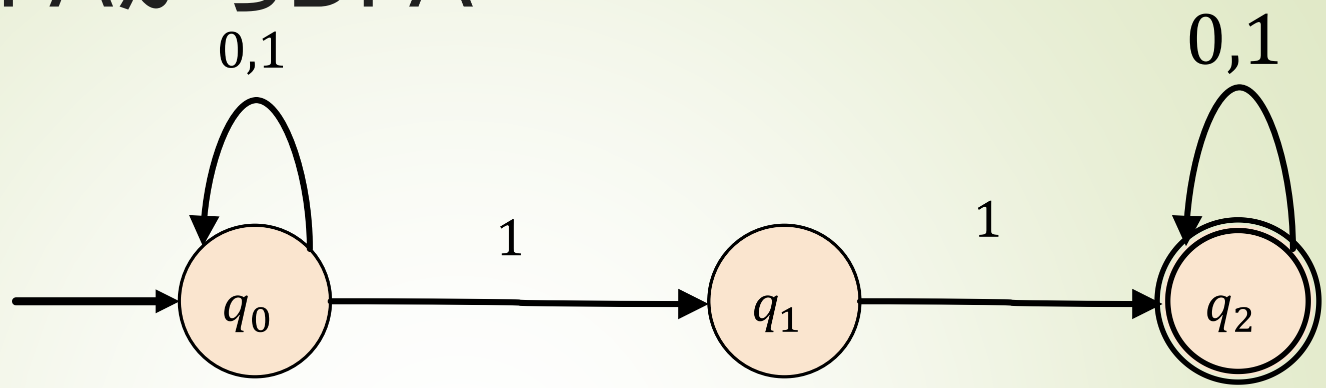
2020年後期

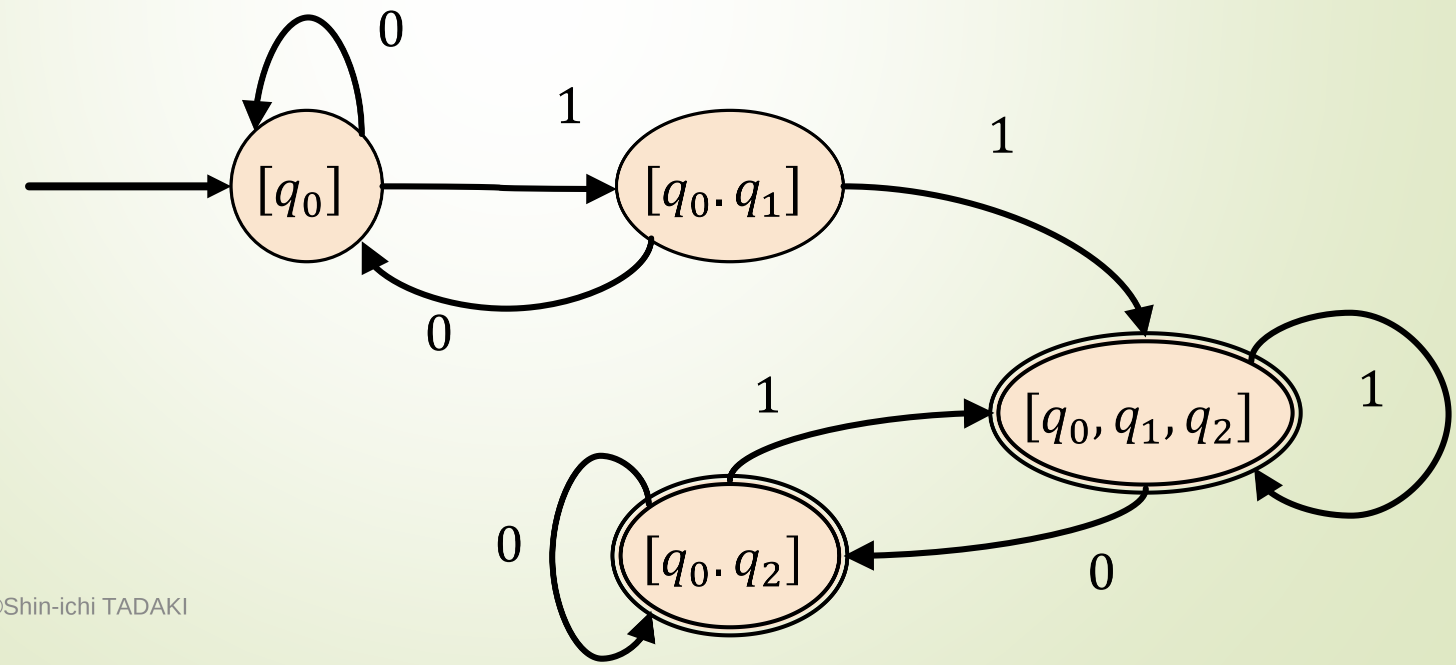
佐賀大学理工学部　只木進一

非決定性有限オートマトン:復習

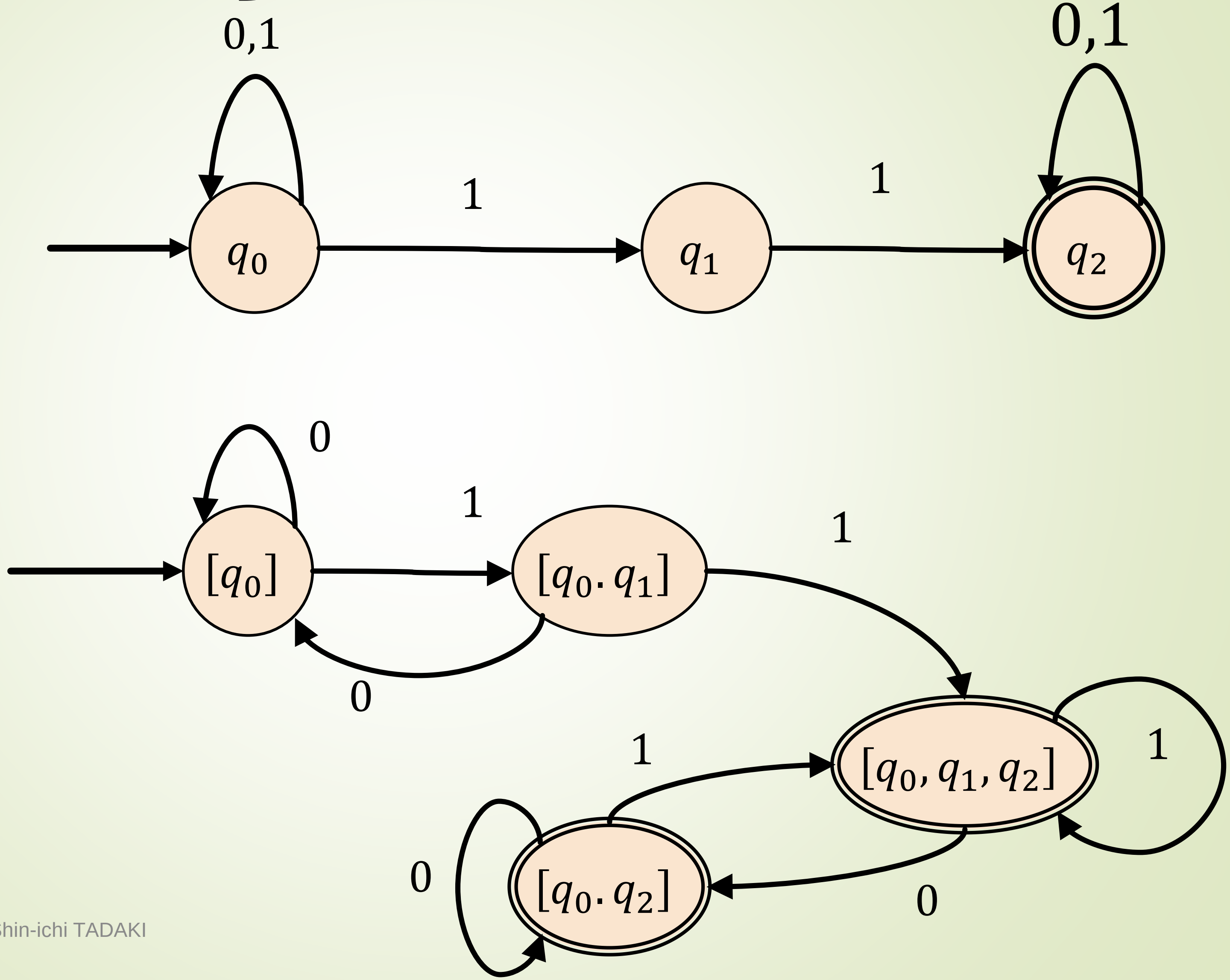
- $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
  - Q : 内部状態の集合
  - Σ: 入力アルファベット
  - $\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$: 状態遷移関数
    - 遷移先は複数の状態
  - $q_0 \in Q$: 初期状態
  - $F \subseteq Q$: 受理状態

NFAからDFAへ





NFAからDFAへ



NFA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$に対応したDFA M'

- $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$
  - $Q' \in 2^Q$
  - Σ: 入力アルファベット
  - $\delta': Q' \times \Sigma \to Q'$: 状態遷移関数
  - $[q_0] \in Q'$: 初期状態
  - $F' = \{A \in 2^Q | A \cap F \neq \emptyset\}$: 受理状態

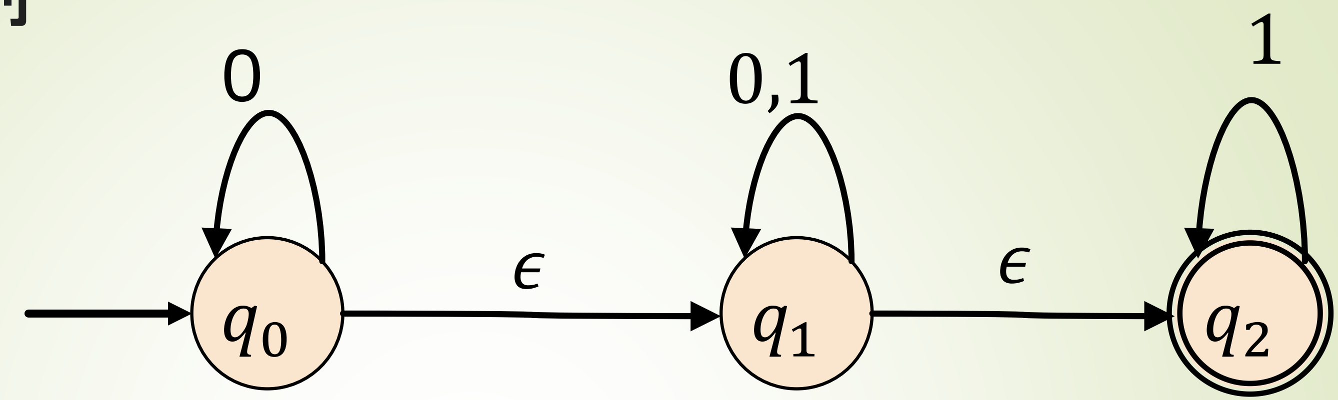
Q'とδ'の構成

$Q' = \{[q_0]\}$
repeat{
  forall ($q' \in Q'$){
    forall ($q \in q'$){
      $S = []$
      forall ($a \in \Sigma$){
        forall ($p \in \delta(q, a)$){
          if ($p \notin S$) $S = S \cup \{p\}$ }
      $\delta'(q', a) = S$
      }
    }
    Q'にSを追加
  }
}(新しいQ'の要素が見つからない)

ϵ動作のある非決定性有限オートマトン

- $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
  - Q : 内部状態の集合
  - Σ: 入力アルファベット
  - $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$: 状態遷移関数
    - 文字を読まずに遷移することがある
  - q_0 : 初期状態
  - $F \subseteq Q$: 受理状態

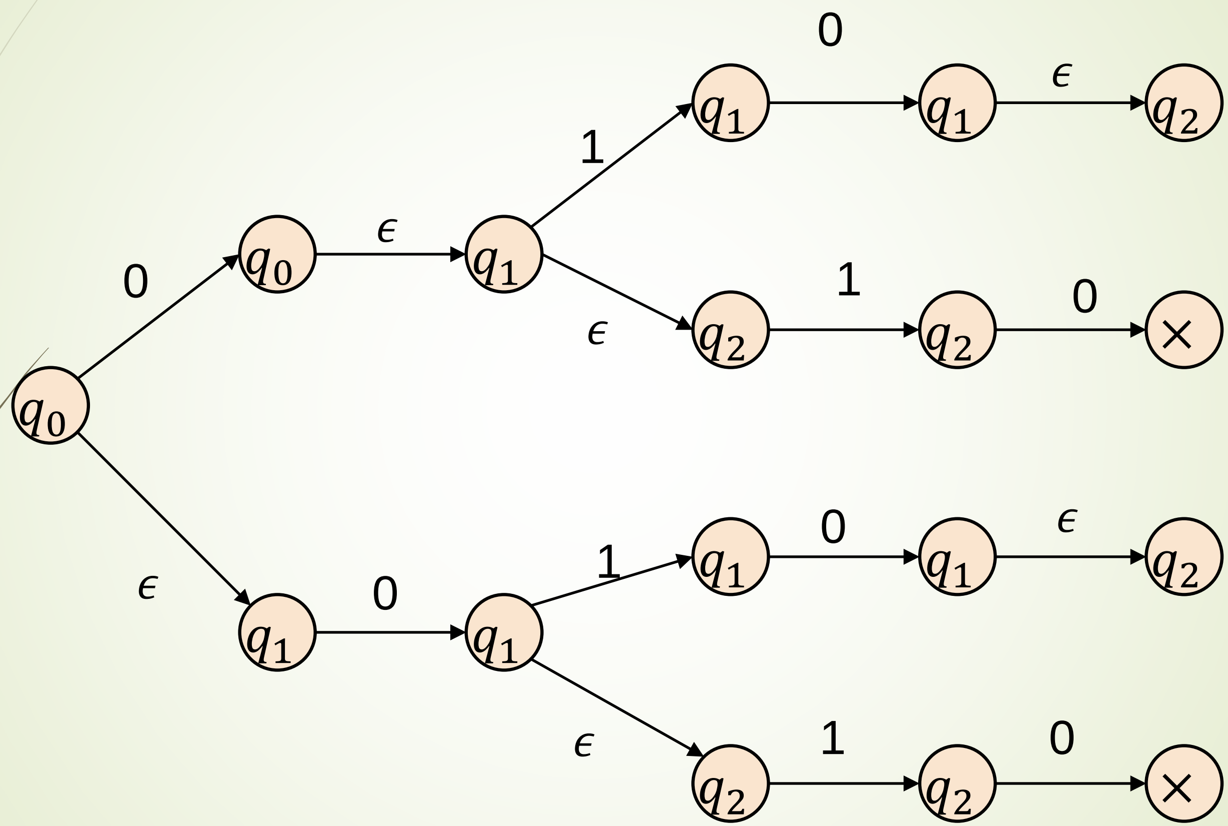
例



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$\Sigma = \{0,1\}$$
$$F = \{q_2\}$$

$\boldsymbol{\delta}$	**0**	**1**	$\boldsymbol{\epsilon}$
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

動作 : 入力” 010”


q_0
0
ϵ
q_0
ϵ
q_1
1
q_1
0
q_1
ϵ
q_2
ϵ
q_2
1
q_2
0
×
q_1
0
q_1
1
q_1
0
q_1
ϵ
q_2
ϵ
q_2
1
q_2
0
×

ϵ-NFAに対するDFAの準備
ϵ-閉包

- Mの状態の集合Q'の各要素からϵ動作のみで到達できる状態の集合
  - $\epsilon\text{-CL}(Q')$

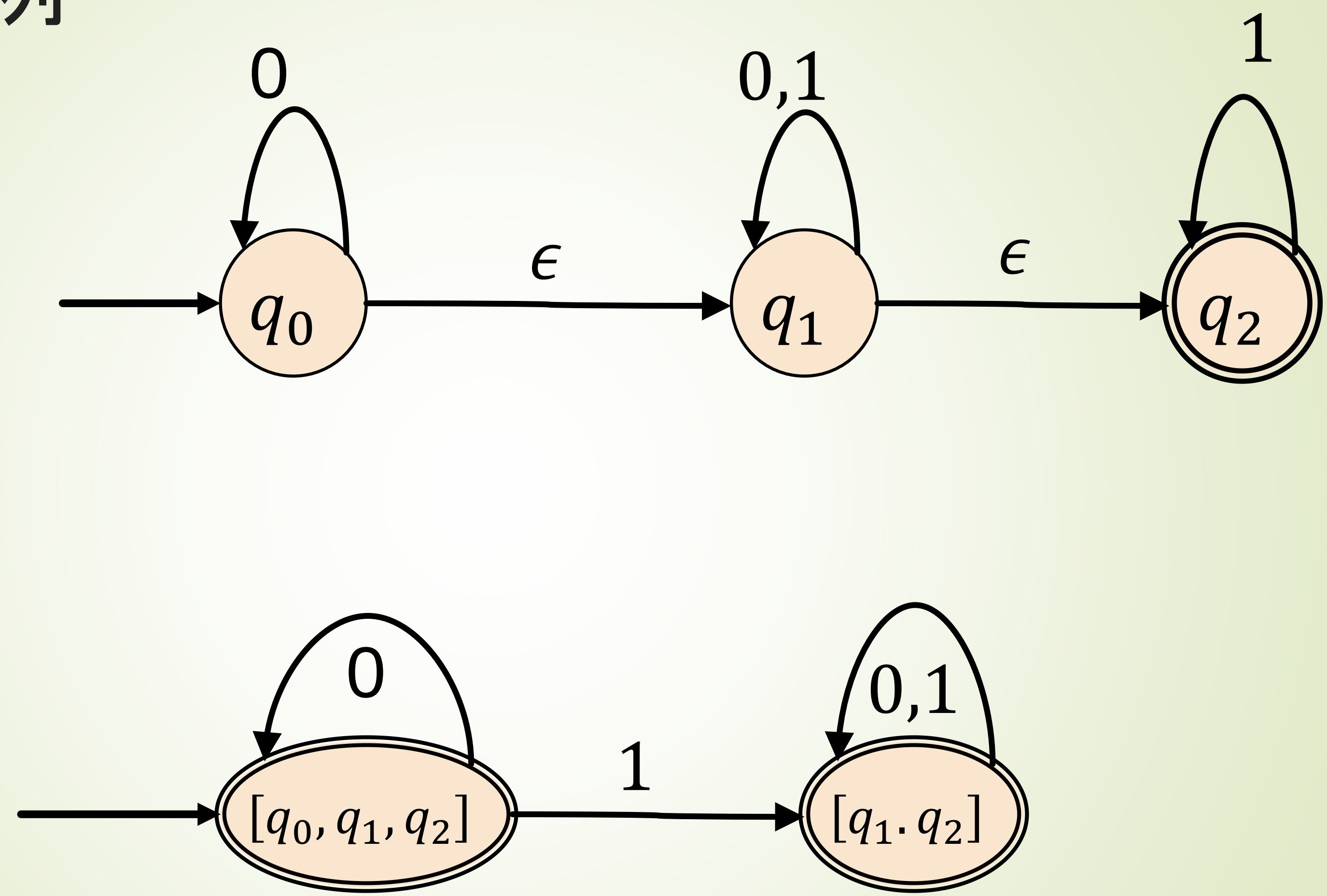
$$Q' = \{q_0\}$$

$$\epsilon\text{-CL}(Q') = \{q_0, q_1, q_2\}$$

ε-NFA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$に対応したDFA M'

- $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$
  - $Q' \in 2^Q$
  - Σ: 入力アルファベット
  - δ': $2^Q \times \Sigma \to 2^Q$: 状態遷移関数
    - δ': $(Q^*, a) \to \epsilon$-CL$(\bigcup_{q \in \epsilon-CL(Q^*)} \delta(q, a))$
  - q'_0= ϵ-CL $(\{q_0\})$: 初期状態
  - $F' = \{A \in 2^Q | A \cap F \neq \emptyset\}$: 受理状態

例



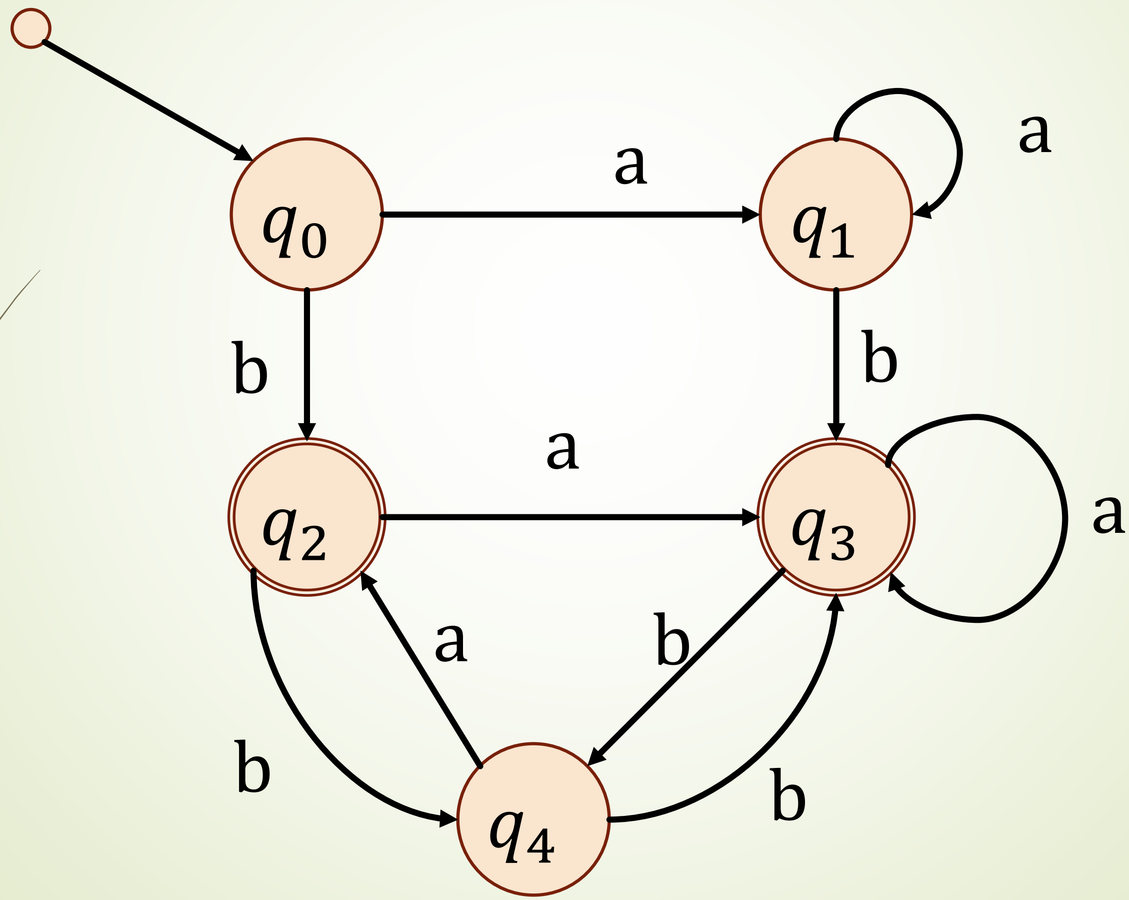
DFAの簡素化

- 同じ文字列を受理するDFAのうちで、状態数の最小のDFAへの変換
  - 状態の集合から入力による遷移先の集合に注目する

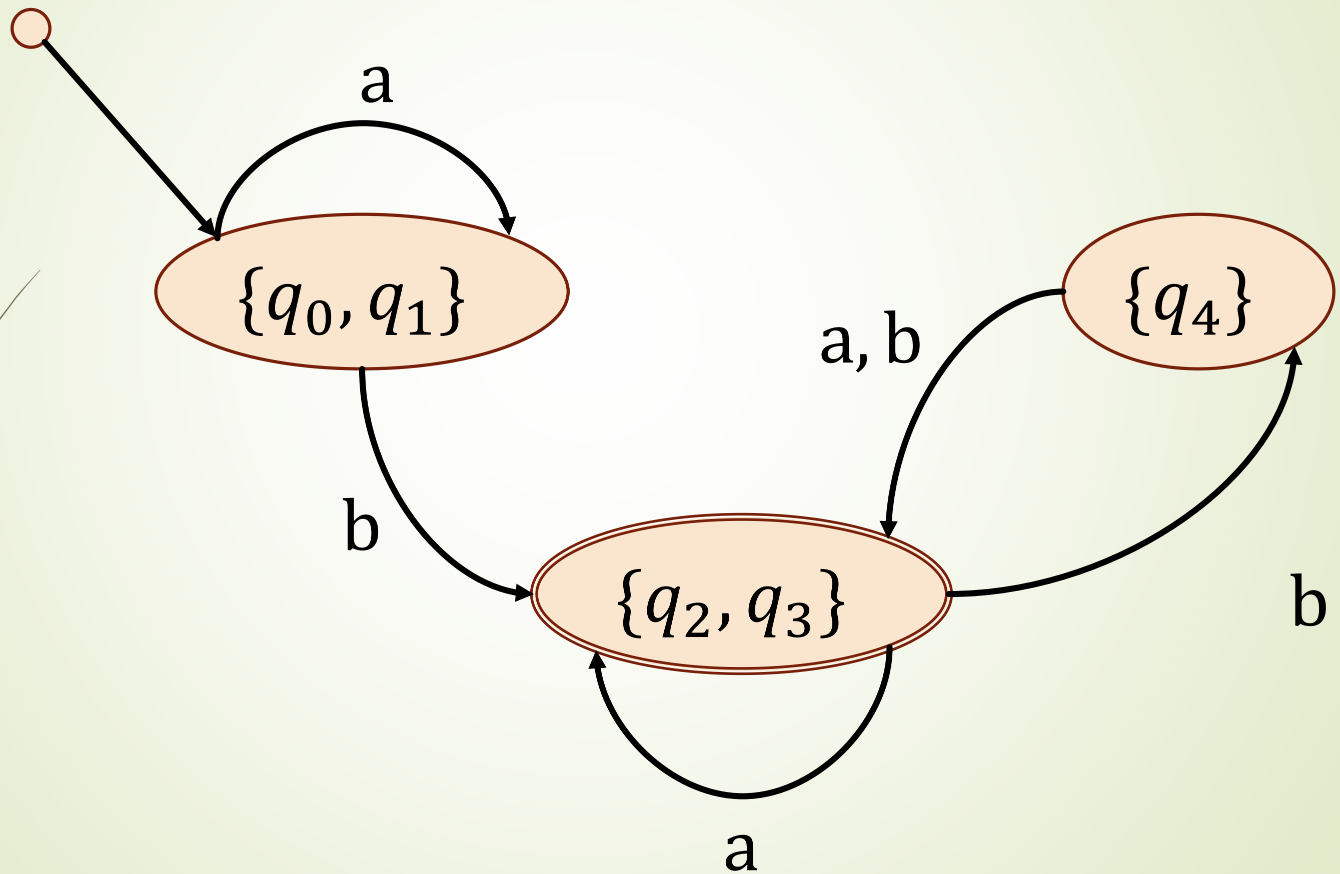
最小化アルゴリズム

1. 状態を受理状態の集合と、それ以外の状態の集合に分ける
2. 各状態集合に対して、各入力による遷移先が同じ集合に分割する
3. 新たな状態集合が無くなるまで、2を繰り返す
4. 元の初期状態を含む状態集合を新たな初期状態に、元の受理状態のみを含む状態集合を新たな受理集合に

例



- 終状態の集合$\{q_2, q_3\}$
  - aの入力で$\{q_2, q_3\}$、bの入力で$\{q_4\}$と、同じ状態に遷移するため、分割しない
- $\{q_0, q_1, q_4\}$
  - aの入力で$\{q_0, q_1\}$はq_1へ、q_4は$\{q_2, q_3\}$へ
  - 二つに分割
- 再度全ての状態集合に確認し、新たな分割は無い


a
$\{q_0, q_1\}$
b
$\{q_2, q_3\}$
a
a, b
$\{q_4\}$
b