# プッシュダウンオートマトン

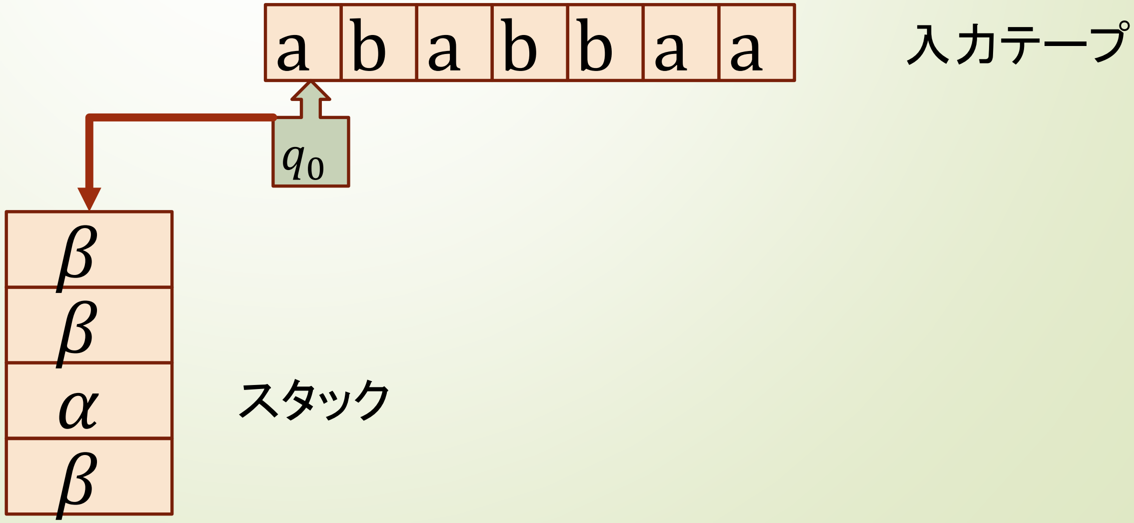
離散数学・オートマトン

2020年後期

佐賀大学理工学部　只木進一

# 動作イメージ

- テープとともに、スタックの文字を読み、状態遷移する
  - 特殊なメモリを持つ機械



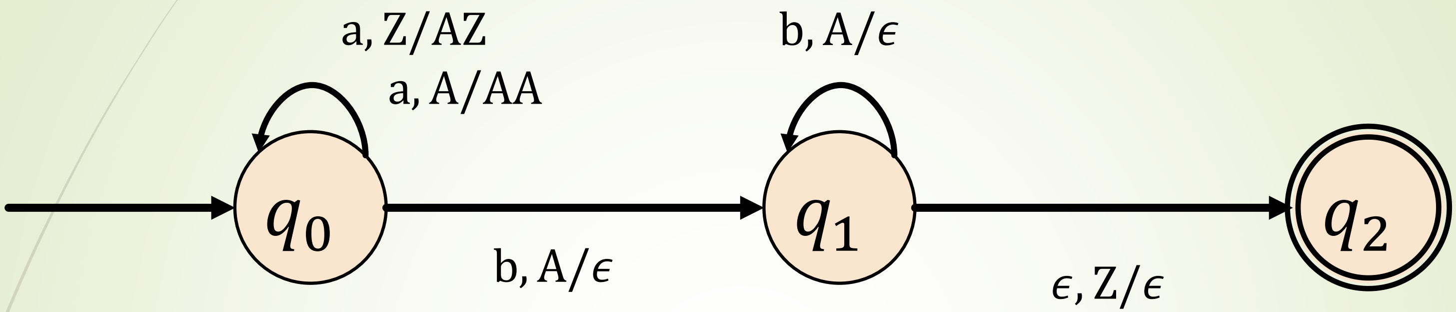
# スタック(stack)

- リストのような1次元のデータ列
- 先頭に書く(push)ことと、先頭から読む(pop)ことだけが許される
  - FILO (First-In Last-Out)
  - pop:先頭を取り出して読む、つまり、先頭の要素はスタックから無くなることに注意

# 決定性プッシュダウンオートマトン

- $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, F \rangle$
  - $Q$ : 内部状態の集合
  - $\Sigma$ : テープのアルファベット
  - $\Gamma$ : スタックのアルファベット、pd記号と呼ぶ
  - $\delta: Q \times \Sigma \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$ : 遷移関数
  - $q_0 \in Q$ : 初期状態
  - $Z \in \Gamma$ : スタックの底の記号
  - $F \subseteq Q$ : 受理状態

# 例




$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$

$$\Gamma = \{\mathrm{A}, \mathrm{Z}\}$$

$$F = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{Z}) = (q_0, \mathrm{AZ})$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{A}) = (q_0, \mathrm{AA})$$

$$\delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{A}) = (q_1, \epsilon)$$

$$\delta(q_1, \mathrm{b}, \mathrm{A}) = (q_1, \epsilon)$$

$$\delta(q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) = (q_2, \epsilon)$$

# 動作

$$(Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$$

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathrm{aaabbb}, \mathrm{Z}) &\vdash (q_0, \mathrm{aabbb}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{abbb}, \mathrm{AAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{bbb}, \mathrm{AAAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{bb}, \mathrm{AAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{b}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) \\
&\vdash (q_2, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

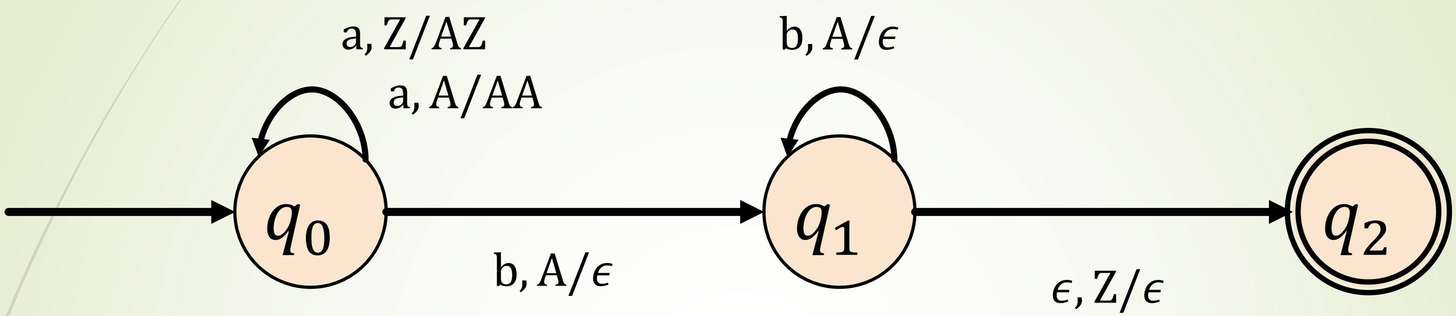
# 動作失敗

$$(Q, \Sigma^*, \Gamma^*)$$

$$\begin{aligned}(q_0, \mathrm{aaabb}, \mathrm{Z}) &\vdash (q_0, \mathrm{aabb}, \mathrm{AZ}) \\ &\vdash (q_0, \mathrm{abb}, \mathrm{AAZ}) \\ &\vdash (q_0, \mathrm{bb}, \mathrm{AAAZ}) \\ &\vdash (q_1, \mathrm{b}, \mathrm{AAZ}) \\ &\vdash (q_1, \epsilon, \mathrm{AZ})\end{aligned}$$

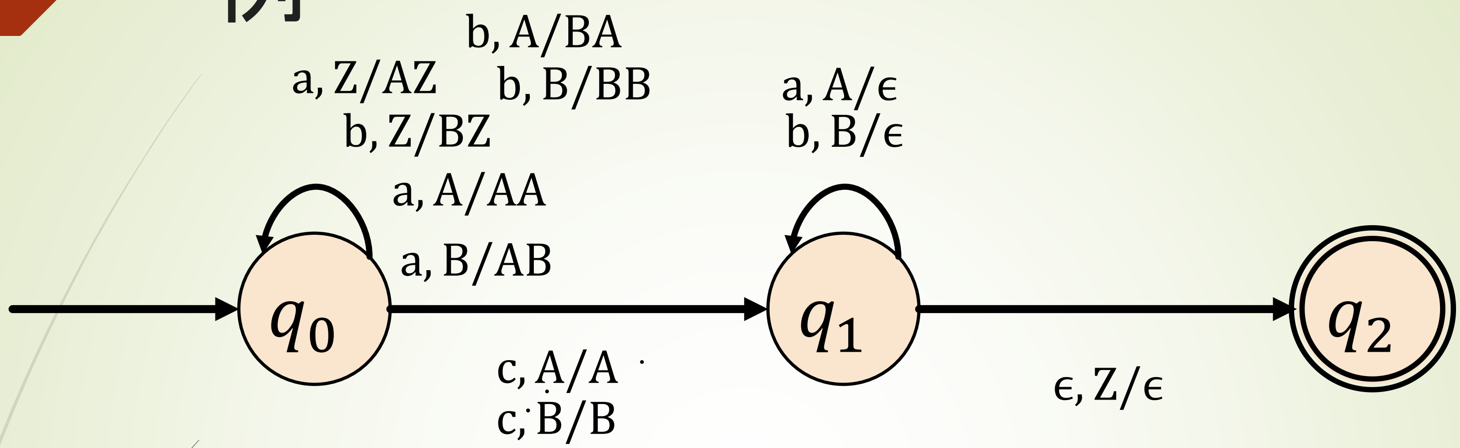
三個のaに対応して、Aを3個スタックに入れた。しかし、b
が2個しかないので、Aがスタックに残り、受理できず。

# 受理言語




- 入力とスタックが空になった時に、終状態に居るか？
- $\{a^i b^i | i \in N\}$を受理
  - aの数をスタック文字Aで記録
  - FAでは受理できない

# 例




$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$$

$$\Gamma = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{Z}\}$$

$$F = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{Z}) = (q_0, \mathrm{AZ})$$

$$\delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{Z}) = (q_0, \mathrm{BZ}), \delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{A}) = (q_0, \mathrm{AA}),$$

$$\delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{A}) = (q_0, \mathrm{BA}), \delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{B}) = (q_0, \mathrm{AB}),$$

$$\delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{B}) = (q_0, \mathrm{BB}), \delta(q_0, \mathrm{c}, \mathrm{A}) = (q_1, \mathrm{A}),$$

$$\delta(q_0, \mathrm{c}, \mathrm{B}) = (q_1, \mathrm{B}), \delta(q_1, \mathrm{a}, \mathrm{A}) = (q_1, \epsilon),$$

$$\delta(q_1, \mathrm{b}, \mathrm{B}) = (q_1, \epsilon), \delta(q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) = (q_2, \epsilon)$$

# 動作

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathrm{abaacaaba}, \mathrm{Z}) &\vdash (q_0, \mathrm{baacaaba}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aacaaba}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{acaaba}, \mathrm{ABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{caaba}, \mathrm{AABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{aaba}, \mathrm{AABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{aba}, \mathrm{ABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{ba}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{a}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) \\
&\vdash (q_2, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

$\{wcw^R | w \in (\mathrm{a} + \mathrm{b})^+\}$を受理
$w^R$は、$w$の逆順の文字列

# 動作失敗

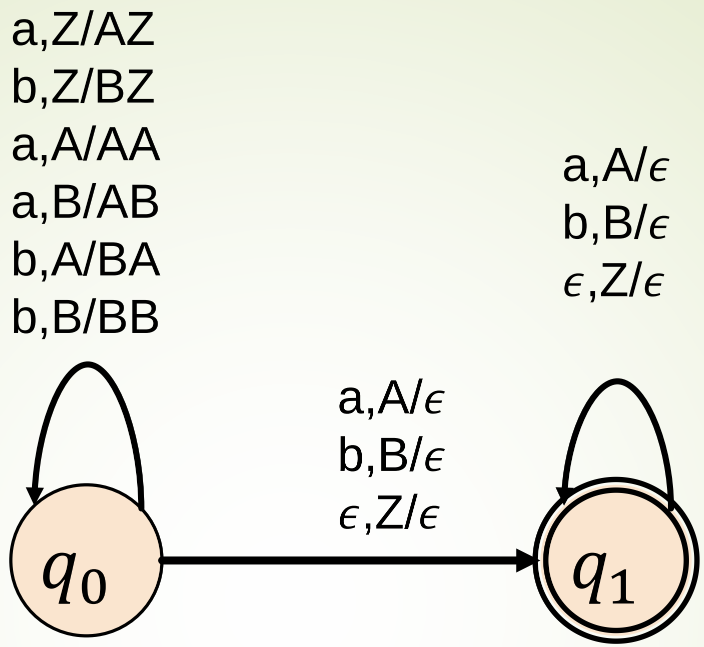
$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathrm{abaaaaba}, \mathrm{Z}) &\vdash (q_0, \mathrm{baaaaba}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aaaaba}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aaaba}, \mathrm{ABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aaba}, \mathrm{AABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aba}, \mathrm{AAABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{ba}, \mathrm{AAAABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{a}, \mathrm{BAAAABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \epsilon, \mathrm{ABAAAABAZ})
\end{aligned}
$$

折り返し記号cが無いと、失敗

# 非決定性プッシュダウンオートマトン

- $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, F \rangle$
  - $Q$ : 内部状態の集合
  - $\Sigma$ : テープのアルファベット
  - $\Gamma$ : スタックのアルファベット、pd記号と呼ぶ
  - $\delta: Q \times \Sigma \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ : 遷移関数
  - $q_0 \in Q$ : 初期状態
  - $Z \in \Gamma$ : スタックの底の記号
  - $F \subseteq Q$ : 受理状態

# 例




$$Q = \{q_0, q_1\}$$

$$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$

$$\Gamma = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{Z}\}$$

$$F = \{q_1\}$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{Z}) = \{(q_0, \mathrm{AZ})\}, \delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{Z}) = \{(q_0, \mathrm{BZ})\},$$

$$\delta(q_0, \epsilon, \mathrm{Z}) = \{(q_1, \epsilon)\},$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{A}) = \{(q_0, \mathrm{AA}), (q_1, \epsilon)\}, \delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{A}) = \{(q_0, \mathrm{BA})\},$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{B}) = \{(q_0, \mathrm{AB})\}, \delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{B}) = \{(q_0, \mathrm{BB}), (q_1, \epsilon)\},$$

$$\delta(q_1, \mathrm{a}, \mathrm{A}) = (q_1, \epsilon), \delta(q_1, \mathrm{b}, \mathrm{B}) = (q_1, \epsilon),$$

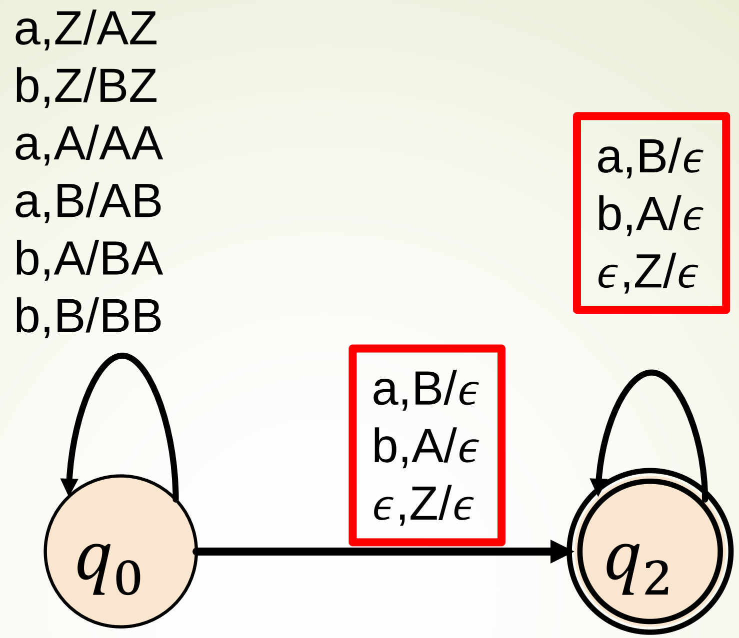
$$\delta(q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) = (q_1, \epsilon)$$

# 動作（受理した例）

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathrm{abaaaaba}, \mathrm{Z}) &\vdash (q_0, \mathrm{baaaaba}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aaaaba}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aaaba}, \mathrm{ABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aaba}, \mathrm{AABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{aba}, \mathrm{ABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{ba}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{a}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

$\{ww^R | w \in (\mathrm{a}+\mathrm{b})^*\}$を受理
$w^R$は、$w$の逆順の文字列

# 例




$$Q = \{q_0, q_1\}$$

$$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$

$$\Gamma = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{Z}\}$$

$$F = \{q_1\}$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{Z}) = \{(q_0, \mathrm{AZ})\},\ \delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{Z}) = \{(q_0, \mathrm{BZ})\},$$

$$\delta(q_0, \epsilon, \mathrm{Z}) = \{(q_1, \epsilon)\},$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{A}) = \{(q_0, \mathrm{AA})\},\ \delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{A}) = \{(q_0, \mathrm{BA}),,(q_1, \epsilon)\},$$

$$\delta(q_0, \mathrm{a}, \mathrm{B}) = \{(q_0, \mathrm{AB}),(q_1, \epsilon)\},\ \delta(q_0, \mathrm{b}, \mathrm{B}) = \{(q_0, \mathrm{BB})\},$$

$$\delta(q_1, \mathrm{a}, \mathrm{B}) = \{(q_1, \epsilon)\},\ \delta(q_1, \mathrm{b}, \mathrm{A}) = \{(q_1, \epsilon)\},$$

$$\delta(q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

# 動作（受理した例）

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathrm{abaabbab}, \mathrm{Z}) &\vdash (q_0, \mathrm{baabbab}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{aabbab}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{abbab}, \mathrm{AABAZ}) \\
&\vdash (q_0, \mathrm{bbab}, \mathrm{AABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{bab}, \mathrm{ABAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{ab}, \mathrm{BAZ}) \\
&\vdash (q_1, \mathrm{b}, \mathrm{AZ}) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \mathrm{Z}) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

# PDAの受理言語

- PDAの受理言語は、正規表現では表せないもの
  - 前半と後半の文字数が同じ、前後を反転などは正規表現では表せない
- スタックを使うことで、前半の文字列を覚えることができる
  - 長さに制限なし