「離散数学・オートマトン」演習問題 03 （解答例)

2020/10/20

1　数学的帰納法

課題 1　$n \in N$ に対する以下の公式を数学的帰納法により証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n \left(4n^2 - 1\right) \tag{1.1}$$

解答例

1. $n = 1$ の場合。左辺 $\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = (2-1)^2 = 1$、右辺 $\frac{1}{3} 1 (4-1) = 1$ となり、式 (1.1) が成り立つ。
2. ある n について式 (1.1) が成り立つと仮定して、$n+1$ の場合を導出する。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + (2n+2-1)^2 \\
&= \frac{1}{3} n (2n+1)(2n-1) + (2n+2-1)^2 \\
&= \frac{1}{3} (2n+1) [n (2n-1) + 3 (2n+1)] \\
&= \frac{1}{3} (2n+1) \left[2n^2 - n + 6n + 3\right] \\
&= \frac{1}{3} (2n+1)(2n+3)(n+1) \\
&= \frac{1}{3} (n+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)-1)
\end{aligned}$$

これは、式 (1.1) の $n+1$ の場合である。

課題 2　$n \in N$ に対する以下の公式 (de Moivre の公式) を数学的帰納法により証明しな

さい。

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.2}$$

ここで、i は虚数単位 $i^2 = -1$ である。

解答例　$n = 1$ は自明である。ある n について式 (1.2) が成り立つと仮定して、$n+1$ の場合を導出する。

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &\quad + i\cos(n\theta)\sin(\theta) + i\sin(n\theta)\cos(\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\end{aligned}$$

これは、式 (1.2) の $n+1$ の場合である。

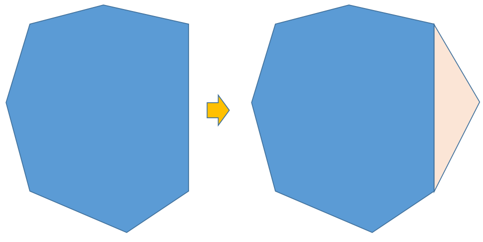
課題 3　$n \geq 3$ を自然数とする。凸 n 角形の内角の和は $(n-2)\pi$ であることを、数学的帰納法により証明しなさい。三角形の内角の和が π であることを使用してよい。

解答例

1. $n = 3$ の場合、$(3-2)\pi = \pi$
2. ある n に対して、凸 n 角形の内角の和は $(n-2)\pi$ であると仮定する。この凸 n 角形に対して頂点を一つ追加することは、三角形を一つ追加することである。従って、その内角の和は、

$$(n-2)\pi + \pi = ((n+1)-2)\pi$$

となる。



2　再帰的定義

課題 4　記号 $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ で構成する回文、つまり前から読んでも、後から読んでも同じになる文の集合 L を再帰的に定義しなさい。ただし、$\epsilon \in L$(ϵ は、長さゼロの文字列) とする。

解答例

1. $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \epsilon \in L$
2. $s \in L$ ならば、$\mathrm{a}s\mathrm{a} \in L$、$\mathrm{b}s\mathrm{b} \in L$

課題 5　二項係数は、$n \in N$、$1 \leq k \leq n-1$ として、以下のように再帰的に定義することができる。

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1 \tag{2.2}$$

このとき、実際に $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求め、

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.3}$$

と比較しなさい。

解答例　初めに、再帰的定義に従って値を求める。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 2 + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= 6
\end{aligned}$$

次に、式 (2.3) に従って、直接計算する。

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

二項係数を求める python コードを示す。

```
def binomial(n,k):
    if (k == 0) or (k == n):
        return 1
    return binomial(n-1,k-1) + binomial(n-1,k)

n = 4
k = 2
v = binomial(n,k)
m = f'C({n},{k})={v}'
print(m)
```

このコードは、以下の Github から取得できます。

https://github.com/discrete-math-saga/MathematicalInductionAndRecursiveDefinitions