学籍番号									氏名	

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「離散数学・オートマトン」確認テスト

2020/10/20

問 1　$n \in N$ に対する以下の公式を数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \left(n+1\right)\left(2n+1\right) \tag{1}$$

解答例

1. $n = 1$ の場合、左辺は $\sum_{k=0}^{1} k^2 = 1^2 = 1$、右辺は

$$\frac{1}{6} 1 \left(1+1\right)\left(2+1\right) = 1$$

となり、式 (1) が成り立つ。

2. ある n で式 (1) が成り立つと仮定し、$n+1$ についても成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \left(n+1\right)^2 &= \frac{1}{6} n \left(n+1\right)\left(2n+1\right) + \left(n+1\right)^2 \\
&= \frac{1}{6}\left(n+1\right)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right] = \frac{1}{6}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+3\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2\left(n+1\right)+1\right)
\end{aligned}$$

これは、式 (1) の $n+1$ の場合である。

問 2　以下の関数または述語を再帰的に定義しなさい。

1. $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k \ \forall n \in N$
2. $F(n) = \prod_{k=1}^{n} k \ \forall n \in N$
3. $P(n) : \exists m \in N, n = 3 \times m$($n$ が 3 の倍数の時、述語 $P(n)$ は真となる)

解答例

1. $S(1) = 1$、$S(n) = S(n-1) + n$ for $n > 1$
2. $F(1) = 1$、$F(n) = n \times F(n-1)$ for $n > 1$
3. $P(1) = F,\ P(2) = F,\ P(3) = T$、$P(n) = P(n-3)$ for $n > 3$