学籍番号									氏名	

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「離散数学・オートマトン」確認テスト

2020/10/27

問 1　集合 $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ 上の関係

$$R = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{d})\} \tag{1}$$

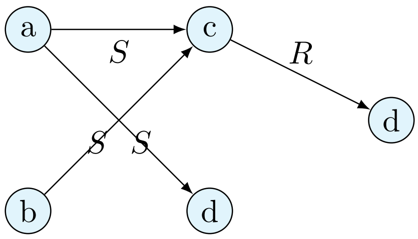
$$S = \{(\mathrm{a}, \mathrm{c}), (\mathrm{a}, \mathrm{d}), (\mathrm{b}, \mathrm{c})\} \tag{2}$$

に対して、$R \circ S$、R^2、S^2 を求めよ。

解答例

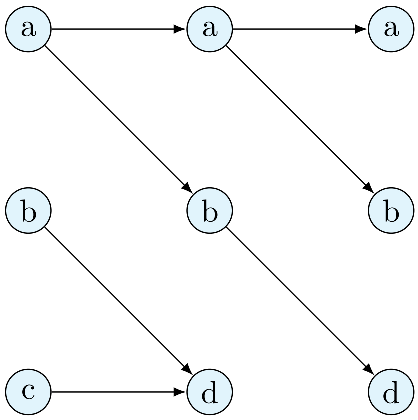
- $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$ であることから

$$R \circ S = \{(\mathrm{a}, \mathrm{d}), (\mathrm{b}, \mathrm{d})\}$$



- $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$ であることから

$$R^2 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{a}, \mathrm{d})\}$$



- $S^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zSy\}$ であることから

$$S^2 = \emptyset$$

問 2　N 上の関係 R を $nRm = \{(n, m) \mid m \bmod n = 0\}$、つまり n は m を割り切る、で定義する。このとき、R は、N 上の半順序であって、全順序でないことを示しなさい。

解答例　はじめに、反射律、推移律、反対称律を示すことで半順序であることを示す。

- 反射律：$\forall n \in N$ に対して nRn は明らか
- 推移律：nRm かつ $mR\ell$ とは、m が n の倍数であり、かつ ℓ が m の倍数であることである。従って、ℓ は n の倍数となり、$nR\ell$ が成り立つ。
- 反対称律：nRm かつ mRn とは、m が n の倍数であり、かつ n が m の倍数であることである。つまり、$n = m$ である。

以上から、半順序であることが分かった。

N の任意の要素の組 (x, y) に対して関係 R を考えると、関係が成立しない組を例示することができる。例えば、$(3, 5)$ と $(5, 3)$ のいずれにも関係 R は成立しない。つまり、関係 R は全順序ではない。