命題と述語

離散数学・オートマトン
2021 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. 命題: Propositions
2. 論理演算
3. 述語: predicates
4. 述語と論理演算

命題: Propositions

- 言明: ある事実を述べたもの
  - 真（true, 正しい)、偽（false, 正しくない)
- 命題 (propositions): 真偽が定まる言明
- 真理値/論理値
  - T (true) または F (false)

命題の例

- 7 は素数である: T
- 整数の積は整数である: T

$$\forall x \in Z, \forall y \in Z, \exists z \in Z \Rightarrow xy = z \tag{1}$$

- $2 + 3 = 6$: F
- 任意の自然数は、1 を除いて、一つまたはそれ以上の素数の積として一意に表すことができる (算術の基本定理): T

論理積と論理和

- 二つの命題 p と q
- 論理積: $p \wedge q$
  - 二つの命題がいずれも成り立つとき真
- 論理和: $p \vee q$
  - 二つの命題のいずれか一方が成り立つとき真
- 排他的論理和: $p \oplus q$
  - 二つの命題のいずれか一方だけが成り立つとき真

真理値表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F

Python で真理値表を作る

```
pd = [True, False]
qd = [True, False]
for p in pd:
    for q in qd:
        x = p and q
        y = p or q
        z = p ^ q
        m = f'{p}:{q}:{x}:{y}:{z}'
        print(m)
```

出力

```
True:True:True:True:False
True:False:False:True:True
False:True:False:True:True
False:False:False:False:False
```

p は q を含意する

- p が成り立つならば、q が成り立つ

$$p \Rightarrow q \tag{2}$$

- p を前提（仮定）、 q を結論という。
- 「p は q を含意する」(p implies q)

p と q は論理的に等しい

- p が成り立つとき、かつその時に限って、q が成り立つ

$$p \Leftrightarrow q \tag{3}$$

- p と q は同値
- p と q は論理的に等しい

命題の「逆 (opposite)」と「対偶 (contrapositive)」

- 命題 $p \Rightarrow q$ の逆: $q \Rightarrow p$
- 命題 $p \Rightarrow q$ の対偶: $\neg q \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Python で確認

```
pd = [True, False]
qd = [True, False]
for p in pd:
    for q in qd:
        x = (not p) or q
        m = f'{p}:{q}:{x}'
        print(m)
```

結果

```
True:True:True
True:False:False
False:True:True
False:False:True
```

背理法: proof by contradiction

- 命題 $p \Rightarrow q$ をその対偶 $\neg q \Rightarrow \neg p$ を証明することで示す
- 例：合成数 (1 より大きい素数でない自然数)n は、$\sqrt{n}$ 以下の素因子を持つ、を背理法で証明する

例: 合成数 (1 より大きい素数でない自然数)n は、$\sqrt{n}$ 以下の素因子を持つ

- 例：n が $\sqrt{n}$ 以下の素因子を持たないと仮定。
- $n = pq \ \ (1 < p \leq q < n)$ と分解
- $n = pq \geq p^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geq p$
- p が素数ならば、仮定と矛盾
- p が素数で無いならば、更に因数分解可能
  - $p = rs(r$ は素数) とすると $\sqrt{n} \geq p \geq r$ となり、r という素因子があり、仮定と矛盾

de Morgan の法則

$$\neg (p \lor q) \Leftrightarrow (\neg p) \land (\neg q) \tag{4}$$

$$\neg (p \land q) \Leftrightarrow (\neg p) \lor (\neg q) \tag{5}$$

p	q	$\neg (p \lor q)$	$\neg (p \land q)$	$(\neg p) \land (\neg q)$	$(\neg p) \lor (\neg q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T

述語: predicates

- T または F を値とする関数を述語という
  - 変数の値によって真偽が定まる
- 大文字の P、Q などで表記
- $P : X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{N-1} \Rightarrow \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$
  - $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{N-1}$ 上の述語
- $Q : X^n \Rightarrow \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$
  - X 上の n 変数述語
- 命題: 変数の無い述語

述語の例

二通りの記述方法を示す

$$P(x) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{if } x \geq 0 \\ \mathsf{F} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

$$P(x) : x \geq 0 \tag{7}$$

$$P(1) = \mathsf{T}$$
$$P(0) = \mathsf{T}$$
$$P(-1) = \mathsf{F}$$

述語の例

$$P\left(x, y, z\right) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{if } x^2 + y^2 = z^2 \\ \mathsf{F} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

$$P\left(x, y, z\right) : x^2 + y^2 = z^2 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} P(3, 4, 5) &= \mathsf{T} \\ P(5, 12, 13) &= \mathsf{T} \\ P(3, 3, 3) &= \mathsf{F} \end{aligned}$$

命題から命題を導出

述語 $P(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2$ を考える。これは、x と y が直角三角形の直角を挟む二辺の長さであり、z がその三角形の斜辺の長さである場合に T となる。
このとき、命題 $Q(x, y) : \exists z P(x, y, z)$ とは、組 (x, y) に対して、ある z が存在して、$P(x, y, z) =$ T とするとき T となる。つまり、(x, y) が直角三角形の直角を挟む二辺の長さであるときに $Q(x, y) =$ T となる。

述語と論理演算: 例

- $P(x)$: x は 2 の倍数

$$P(x) : x \bmod 2 = 0$$

- $Q(x)$: x は 3 の倍数

$$Q(x) : x \bmod 3 = 0$$

x	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
3	F	T	F	T
4	T	F	F	T
5	F	F	F	F
6	T	T	T	T

Python で確認

```
def P(x):
    return (x%2==0)
def Q(x):
    return (x%3==0)

for x in range(3,7):
    a = P(x)
    b = Q(x)
    y = P(x) and Q(x)
    z = P(x) or Q(x)
    m = f'{x}:{a}:{b}:{y}:{z}'
    print(m)
```

結果

```
3:False:True:False:True
4:True:False:False:True
5:False:False:False:False
6:True:True:True:True
```