数学的帰納法と再帰的定義

離散数学・オートマトン
2021 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. 自然数の定義: Definition of natural numbers
2. 数学的帰納法: Mathematical induction
3. 累積帰納法: Course-of-values induction
4. 再帰的定義: Recursive definitions

自然数の定義: Peano の公理

- 集合 N が以下の 3 つを満たすとき、 N の要素を自然数という
  - $1 \in N$
  - 単射 $S : N \to N$ が存在。ただし $1 \notin S(N)$
  $$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
  - $M \subseteq N$ が、以下を満たすとき $M = N$
  $$1 \in M$$
  $$S(M) \subseteq M$$

Peano の公理の意味

- $S(n)$ は $n+1$ に相当: 「後者」
- Peano の 2 番目の公理より

$$\begin{aligned} 2 &= S(1) \\ 3 &= S(2) \\ &\cdots \end{aligned}$$

- Peano の 3 番目の公理
    - 1 を含む N の部分集合が N そのもの
    - つまり、1 から導出されたもの以外を含まない

数学的帰納法: Mathematical induction

- Peano の 3 番目の公理を「数学的帰納法の公理」と呼ぶ
- $P(x)$, $x \in N$ に対する数学的帰納法
  - $P(1) = \mathrm{T}$: 帰納法の基礎
  - 任意に選んだ k に対して $P(k) = \mathrm{T}$ を仮定
  - 帰納ステップにより $P(k+1) = \mathrm{T}$ を示す

例 1

- 命題

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2, \ \forall n \in N \cup \{0\} \tag{1}$$

- $n = 0$

$$\text{LHS} = \sum_{k=0}^{0} (2k+1) = 1$$

$$\text{RHS} = (0+1)^2 = 1$$

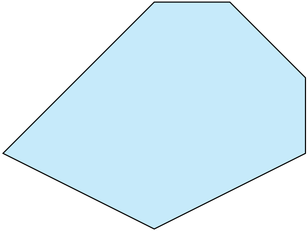
- ある n で命題 (1) が正しいと仮定

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1) + (2(n+1)+1) \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = ((n+1)+1)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

例 2

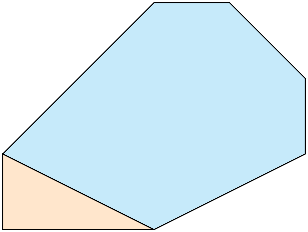
凸な正 n 角形の内角の和は $A_n = (n-2)\pi$ である。

- $n = 3$ の場合 $A_3 = \pi$ は自明
- ある n で正しいとする: $A_n = (n-2)\pi$



続き

- 一点追加する



$$A_{n+1} = A_n + \pi = ((n+1) - 2)\,\pi$$

例 3

- 命題: 集合 A の大きさ $|A|$ に対して、$|A| < \infty$ ならば $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$
- $|A| = 0$、つまり $A = \emptyset$ の場合

$$\text{LHS} = \left|2^{\emptyset}\right| = |\{\emptyset\}| = 1$$
$$\text{RHS} = 2^{|A|} = 2^0 = 1$$

- $|A| = k$ の場合に命題が正しいと仮定し、新に一つ要素を追加した集合を $B = A \cup \{b\}$ とする

つづき

- 2^B の要素は、2^A の要素 (2^k 個) と、2^A の各要素に b を加えたもの (2^k 個) の全体

$$2^B = 2^A \cup \left\{ s \cup \{b\} \,\middle|\, s \in 2^A \right\} \tag{3}$$

- つまり

$$\left| 2^B \right| = 2^k + 2^k = 2^{k+1} \tag{4}$$

$$2^{|B|} = 2^{|A|+1} = 2^{k+1} \tag{5}$$

例 4

- $A = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ の場合

$$
\begin{aligned}
2^A &= \{\emptyset, \{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}\} \\
\left|2^A\right| &= 4 \\
2^{|A|} &= 2^2 = 4
\end{aligned}
$$

- $B = A \cup \{\mathsf{c}\}$ とする

$$
\begin{aligned}
2^B &= \{\emptyset, \{\mathsf{a}\}, \{\mathsf{b}\}, \{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{c}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}\} \\
\left|2^B\right| &= 8 \\
2^{|B|} &= 2^3 = 8
\end{aligned}
$$

累積帰納法: Course-of-values induction

- 命題 $P(n)$, $(n \in N,\ n \geq n_0)$
  - $P(n_0)$ が成りたち
  - ある k に対して $P(m)$, $n_0 \leq m \leq k$ が成り立つならば $P(k+1)$ も成り立つとき
  - 任意の $n \geq n_0$ に対して $P(n)$ が成り立つ

累積帰納法が正しいこと

- $k = n_0$ の場合、自明
- 累積帰納法は正しくないと仮定
  - 累積帰納法が正しくない最小の値を $n_f > n_0$ とする
  - しかし、累積帰納法によって $n_0 \leq m < n_f$ が正しいことから $P(n_f)$ が導かれ、矛盾する

例 1: Fibonacci 数列

- Fibonacci 数列を漸化式で定義

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \tag{6}$$

- f_n は次式となる

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{7}$$

- $n = 0$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \tag{8}$$

- $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right) = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

ある n と $n-1$ で、式 (7) が正しいと仮定して、一般式を導出

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

例 2

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_n &= \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n-k}
\end{aligned}
$$

で定義する数列 $\{a_n\}$ の $n \geq 1$ の一般項は

$$a_n = 2^{2n-1}$$

である。

証明

- $n = 1$

$$a_1 = \sum_{k=1}^{1} 2^k a_{n-k} = 2a_0 = 2$$

- $\forall k (1 \leq k \leq n)$ で $a_k = 2^{2k-1}$ であるとする。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n+1-k} + 2^{n+1} a_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k+2(n+1-k)-1} + 2^{n+1} = 2^{2n+1} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} + 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+1} \left(1 - 2^{-n}\right) + 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+1} \end{aligned}$$

再帰的定義: Recursive definitions

- 可算集合や、可算集合上の関数、関係などを、初期値と再帰手続きで定義するもの
- 集合 S の再帰的定義
- 初期ステップ: S の要素をいくつか列挙
- 再帰ステップ: S の要素から新しい要素を導出
- 限定句：上記二つのみで構成することを言明

例 1: Kleene 閉包

- アルファベット (記号の集合)Σ から、その Kleene 閉包 Σ^* を再帰的に定義
- $\forall a \in \Sigma$ に対して $a \in \Sigma^*$。また $\epsilon \in \Sigma^*$
- $\forall a \in \Sigma$ と $\forall x \in \Sigma^*$ に対して、$ax \in \Sigma^*$

例 2: 階乗

- $0! = 1$
- $n! = n \times (n-1)!$, for $n \in N$