関係と順序

離散数学・オートマトン
2021 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. 二項関係: binary relations
2. 関係の演算: Operations of relations
3. 同値関係: equivalence relations
4. 順序: order

二項関係: binary relations

- 2 つのモノを結びつける関係
- 集合 A と B の直積 $A \times B$ の部分集合 R
  - A から B への二項関係（A から B への関係）
  - $R : A \to B$
  - $(a, b) \in R$: a と b は R の関係にある: aRb
  - $R(a) = \{b | aRb\}$: a と R の関係にある全体
- $R : A \to A$: A の上の関係
- 写像、関数との違い
  - A の一つの要素から B の複数の要素への関係も含む

関係の定義域、値域

$$R : X \to Y \tag{1}$$

- **定義域**: X
- **地域**: Y

逆関係: inverse relations

aRb の逆関係

- B から A への関係

$$R^{-1} = \{(b, a)\,|a \in A, b \in B.aRb\} \tag{2}$$

- $b \in B$ と aRb の関係にある a の全体

$$R^{-1}(b) = \{a \in A|aRb\} \tag{3}$$

例 1

- $A = \{\text{Bob}, \text{Ken}, \text{Mary}\}$: 生徒の集合
- $B = \{\text{Math}, \text{Science}, \text{Social}\}$:科目の集合
- $R : A \to B$
  - 生徒 $a \in A$ は、科目 $b \in B$ が得意である

例 2

- $X = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ 上の二項関係

$$R = \{(\mathsf{a}, \mathsf{a}), (\mathsf{a}, \mathsf{b}), (\mathsf{a}, \mathsf{c}), (\mathsf{b}, \mathsf{a}), (\mathsf{c}, \mathsf{a})\} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} R(\mathsf{a}) &= \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\} \\ R(\mathsf{b}) &= R(\mathsf{c}) = \{\mathsf{a}\} \\ R^{-1}(\mathsf{a}) &= \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\} \\ R^{-1}(\mathsf{b}) &= R^{-1}(\mathsf{c}) = \{\mathsf{a}\} \end{aligned}$$

例 3

- 集合 X の部分集合上の包含関係 $\subseteq = \{(A, B), A \subseteq B \subseteq X\}$
- $\subseteq^{-1}(B) = 2^B$: B のべき集合: B の部分集合全体

関係と関数: Relations and Functions

- 関係 $R : X \to Y$ が以下を満たすとき、関数と呼ぶ
  - $\forall x \in X$ に対して $|R(x)| = 1$、つまり x に対して一つの $y \in Y$ が定まる
- つまり、関数は、関係の特別な場合

関係の結合: Compositions

- 集合 X、Y、Z に対する関係 $R : X \to Y$ 及び $S : Y \to Z$
- 関係の結合

$$S \circ R : X \to Z \tag{5}$$

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z | \exists y \in Y,\ xRy \wedge ySz\} \tag{6}$$

- 結合律

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1 \tag{7}$$

例 1

- $A = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ と $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
R &= \{(\mathsf{a}, \alpha), (\mathsf{a}, \beta), (\mathsf{b}, \beta), (\mathsf{c}, \gamma)\} && (8)\\
S &= \{(\alpha, \mathsf{a}), (\alpha, \mathsf{b}), (\beta, \mathsf{b}), (\gamma, \mathsf{a})\} && (9)\\
S \circ R &= \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in X,\ xRy \wedge ySz\} \\
&= \{(\mathsf{a}, \mathsf{a}), (\mathsf{a}, \mathsf{b}), (\mathsf{b}, \mathsf{b}), (\mathsf{c}, \mathsf{a})\} && (10)
\end{aligned}
$$

恒等関係、関係のべき乗

- $R : A \to A$
  - $R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \,| a \in A\}$: **恒等関係**: identity
  - $R^{n+1} = R \circ R^n$: **べき乗**: exponentiation

関係の和、共通部分

- 定義域と値域が共通の二つの関係 $R, S : A \to B$
  - 和: $R \cup S$
  - 共通部分: $R \cap S$
- 反射的推移閉包

$$R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n \tag{11}$$

- 推移閉包

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \tag{12}$$

例 2

- N 上の二項関係 $nRm \Leftrightarrow n = m + 1$

$$
\begin{aligned}
nR^0m &\Leftrightarrow n = m \\
nR^1m &\Leftrightarrow n = m + 1 \\
nR^2m &\Leftrightarrow n = m + 2 \\
nR^km &\Leftrightarrow n = m + k \\
nR^*m &\Leftrightarrow \exists k \geq 0,\ nR^km \Leftrightarrow n \geq m \\
nR^+m &\Leftrightarrow \exists k > 0,\ nR^km \Leftrightarrow n > m
\end{aligned}
$$

同値関係: equivalence relations

- $R : A \to A$
- 以下の三つの性質を全て満たす関係: 同値関係
  - 反射律 (reflexive): $\forall a \in A$ に対して aRa
  - 対称律 (symmetric): $\forall a, b \in A$ に対して $aRb \Leftrightarrow bRa$
  - 推移律 (transitive): $\forall a, b, c \in A$ に対して $aRb \land bRc \Leftrightarrow aRc$

例 1: m を法とする合同

- $x, y \in N \cup \{0\}$ を $m \in N$ で除した余りが等しい

$$R = \{(x, y) \,|x \equiv y \,(\bmod m)\} \tag{13}$$

- 反射律: xRx は自明
- 対称律: $xRy \Rightarrow yRx$ も自明
- 推移律: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  - $k, \ell \in N$ が存在し、$x - y = km$ かつ $y - z = \ell m$。従って

$$x - z = (k + \ell)\, m \tag{14}$$

同値類: equivalence classes

- 集合 A 上の同値関係 R によって、集合 A を分ける
- $a \in A$ に対して

$$[a]_R = \{b \in A | aRb\} \tag{15}$$

  - R によって定まる a と同値なものの全体
  - a を代表元という

同値類の性質

- 集合 A 上の同値関係 R
- $\forall a, b, c \in A$
    - $a \in [a]_R$
    - $b, c \in [a]_R \Rightarrow bRc$
    - $aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$
    - $[a]_R = [b]_R$ と $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ のいずれか一方だけが必ず成り立つ
    - $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

m を法とする剰余類

- $R = \{(x, y) \,|x \equiv y \,(\mathrm{mod} m)\}$
- $m = 3$ の場合 $(k \in N \cup \{0\})$

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{n|n = 3k\} \\
[1] &= \{n|n = 3k + 1\} \\
[2] &= \{n|n = 3k + 2\}
\end{aligned}
$$

順序: order

- 反対称律: anti-symmetric
  - $\forall a, b \in A$ に対して $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- 関係が反射律、推移律、反対称律を満たすとき、半順序 (partial-order) または順序という
  - 大小関係 $\leq$ は半順序
  - 半順序が定義された集合を半順序集合という

全順序: total order

- 全順序: 半順序に加えて、任意の二つの要素について比較可能であるとき
- 全順序集合: 全順序を定義された集合

例 1

- 自然数、整数、有理数、実数に対する大小関係 $\leq$ は全順序
  - 任意の要素を大小関係 $\leq$ で比較可能
- 集合の包含関係 $\subseteq$ は半順序
  - 任意の集合の間に包含関係は成り立たない

例 2

$n, m \in N$ 対する関係「$n|m$:n は m を割り切る」は半順序

- 反射律: $n|n$ は自明
- 推移律: $n|m \wedge m|\ell \Rightarrow n|\ell$

$$\begin{aligned}&(n|m \Rightarrow m = an,\ \ m|\ell \Rightarrow \ell = bm)\\&\Rightarrow \ell = bm = abn\end{aligned}$$

- 反対称律

$$\begin{aligned}n|m \wedge m|n \Rightarrow m = an \wedge n = bm&\\\Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow n = m&\end{aligned}$$

- n と m が互いに素の場合には、関係が成り立たないため、全順序ではない