# 論理とブール代数

離散数学・オートマトン
2021 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

# 命題論理: Propositional logic

- 論理変数：T または F しか取らない変数
- 命題論理：論理変数を論理演算で結んだもの

# 論理式の再帰的定義

- $a \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \Rightarrow a$ は論理式
- $A$ は論理変数 $\Rightarrow A$ は論理式
- $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が論理式のとき、以下も論理式
  - 否定: $\neg\mathcal{A}$
  - 論理積: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  - 論理和: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
  - $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

# 論理関数: Logical/Boolean functions

- 論理変数 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ を変数とする述語:

$$\mathcal{A}(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}) \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \quad (1)$$

- 付値: $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ に具体的な値を定めること
  - $\sigma(\mathcal{A})$: ある付値 $\sigma$ に対する $\mathcal{A}$ の値
- 恒等式 (tautology): $\models \mathcal{A}$

$$\forall\sigma,\ \sigma(\mathcal{A}) = \mathsf{T} \quad (2)$$

- $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は同値: $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) = \mathsf{T}$

# 命題論理の性質: Properties of Propositional logic

$A$、$B$、$C$ は論理変数

- べき等律:

$$A \wedge A \equiv A, \;\; A \vee A \equiv A \tag{3}$$

- 可換律:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \;\; A \vee B \equiv B \vee A \tag{4}$$

- 結合律:

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \tag{5}$$

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \tag{6}$$

- 分配律:

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{7}$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{8}$$

- 吸収律:

$$(A \wedge B) \vee A \equiv A \tag{9}$$
$$(A \vee B) \wedge A \equiv A \tag{10}$$

- de Morgan:

$$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \tag{11}$$
$$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \tag{12}$$

- 二重否定:

$$\neg (\neg A) \equiv A \tag{13}$$

- $$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \tag{14}$$
- $$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{15}$$
- $$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \tag{16}$$
- 排中律:
$$A \vee \neg A \equiv \mathsf{T} \tag{17}$$
- 矛盾律:
$$A \wedge \neg A \equiv \mathsf{F} \tag{18}$$

- 三段論法:

$$\models ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{19}$$

-

$$
\begin{aligned}
A \vee \mathsf{T} &\equiv \mathsf{T} & \qquad A \wedge \mathsf{T} &\equiv \mathsf{A} \\
A \vee \mathsf{F} &\equiv A & \qquad A \wedge \mathsf{F} &\equiv \mathsf{F}
\end{aligned}
$$

# 標準形: Normal forms

- NAND: $A \uparrow B \equiv \neg(A \wedge B)$
- NOR: $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B)$
- 任意の論理式を以下の形式で表現可能
    - $\neg$ と $\wedge$ しか含まない
    - $\neg$ と $\vee$ しか含まない
    - $\neg$ と $\Rightarrow$ しか含まない
    - $\uparrow$ しか含まない
    - $\downarrow$ しか含まない

# 標準形: 証明

- 論理和が否定と論理積で表現可能: de Morgan

$$p \vee q \equiv \neg \left( \neg p \wedge \neg q \right)$$

- 論理積が否定と論理和で表現可能: de Morgan

$$p \wedge q \equiv \neg \left( \neg p \vee \neg q \right)$$

- 論理和、論理積を否定と $\Rightarrow$ で表現

$$p \wedge q \equiv \neg \left( \neg p \vee \neg q \right) \equiv \neg \left( p \Rightarrow \neg q \right)$$
$$p \vee q \equiv \left( \neg\neg p \right) \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$$

# 標準形: 証明

- NAND だけで表現できること

$$
\begin{aligned}
\neg p &\equiv \neg(p \wedge p) \equiv p \uparrow p \\
p \vee q &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv \neg((p \uparrow p) \wedge (q \uparrow q)) \\
&\equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \\
p \wedge q &\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \\
&\equiv \neg(((p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p)) \uparrow ((q \uparrow q) \uparrow (q \uparrow q))) \\
&\equiv \neg(p \uparrow q) \\
&\equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}
$$

- 注意:

$$
(p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p) \equiv p
$$

# Python で確認

```
def nand(p:bool, q:bool) -> bool:
    return not (p and q)

for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        #and
        x = nand( nand(p,q), nand(p,q))
        #or
        y = nand( nand(p,p),nand(q,quit))
        print(f'{p}:{q}:{x}:{y}')

for p in [True, False]:
    x = nand( nand(p,p), nand(p,p))
    print(f'{p}:{x}')
```

# 標準形: 証明

- NOR だけで表現できること

$$
\begin{aligned}
\neg p &\equiv \neg(p \vee p) \equiv p \downarrow p \\
p \wedge q &\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \\
&\equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\
p \vee q &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \\
&\equiv \neg(((p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p)) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))) \\
&\equiv \neg(p \downarrow q) \\
&\equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)
\end{aligned}
$$

- 注意:

$$(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p) \equiv p$$

# Python で確認

```
def nor(p:bool, q:bool) -> bool:
    return not (p or q)

for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        #and
        x = nor( nor(p,p), nor(q,q))
        #or
        y = nor( nor(p,q), nor(p,q))
        print(f'{p}:{q}:{x}:{y}')

for p in [True, False]:
    x = nor( nor(p,p), nor(p,p))
    print(f'{p}:{x}')
```

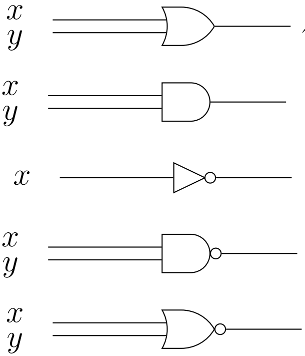
# ブール代数

- 1 bit に対して $0 \to$ F、$1 \to$ T と対応付ける
- ブール変数:$\{0, 1\}$
- 演算の対応付け

| 論理演算 | ブール演算 |
|---|---|
| $p \vee q$ | $p + q$ |
| $p \wedge q$ | $p \cdot q$ |
| $\neg p$ | $\overline{p}$ |

- 基本積: 同じ変数の一回のみ含む論理積

# 論理回路




$$z = x + y$$

$$z = x \cdot y$$

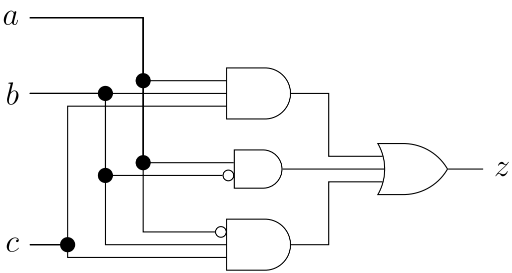
$$z = \overline{x}$$

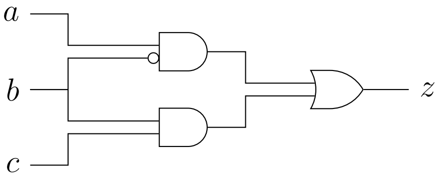
$$z = \overline{x \cdot y}$$

$$z = \overline{x + y}$$

# 例 1: より少数の基本積へ

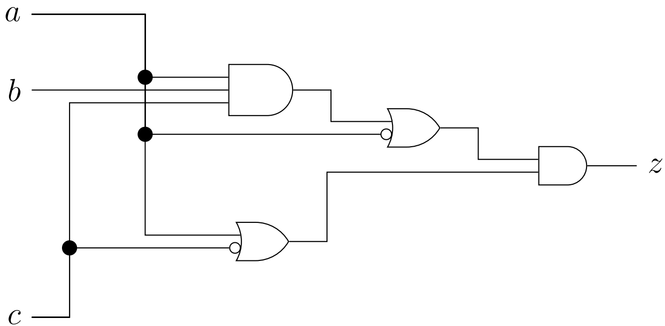
$$
\begin{aligned}
z &= abc + a\overline{b} + \overline{a}bc \\
&= \left(a + \overline{a}\right) bc + a\overline{b} \\
&= a\overline{b} + bc
\end{aligned}
$$

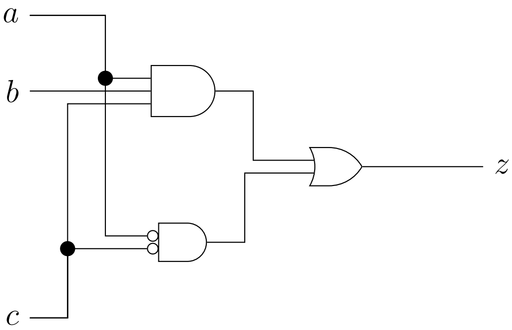



$a$
$b$
$c$
$z$

# 例 2

$$
\begin{aligned}
z &= (abc + \overline{a})\,(a + \overline{c}) \\
&= aabc + abc\overline{c} + a\overline{a} + \overline{a}\overline{c} \\
&= abc + 0 + 0 + \overline{a}\overline{a} \\
&= abc + \overline{a}\overline{a}
\end{aligned}
$$




a
b
c
z

# カルノー図: Karnaugh maps

- ブール表現を最小化する道具
- 各区画は、基本積
- 隣接する区画の基本積は一文字違い
- 隣接する区画をまとめる

# 2 変数カルノー図

- 基本

| | $y$ | $\overline{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | $xy$ | $x\overline{y}$ |
| $\overline{x}$ | $\overline{x}y$ | $\overline{xy}$ |

# 例 1

横に並んだ区画をまとめると常に T

$$E = xy + x\overline{y} = x\left(y + \overline{y}\right) = x$$

| | $y$ | $\overline{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | $xy$ | $x\overline{y}$ |
| $\overline{x}$ | | |

# 例 2

$$
\begin{aligned}
E &= xy + \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y} \\
&= xy + \overline{x}y + + \overline{x}y\overline{x}\,\overline{y} \\
&= \left(x + \overline{x}\right) y + \overline{x} \left(y + \overline{y}\right) \\
&= \overline{x} + y
\end{aligned}
$$

| | $y$ | $\overline{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | $xy$ | |
| $\overline{x}$ | $\overline{x}y$ | $\overline{x}\,\overline{y}$ |

# 3 変数カルノー図

- **基本**

| | $yz$ | $y\overline{z}$ | $\overline{y}\overline{z}$ | $\overline{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $xyz$ | $xy\overline{z}$ | $x\overline{y}\overline{z}$ | $x\overline{y}z$ |
| $\overline{x}$ | $\overline{x}yz$ | $\overline{x}y\overline{z}$ | $\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ | $\overline{x}\overline{y}z$ |

# 例 3

$$z = xyz + xy\bar{z} = xy\left(z + \bar{z}\right) = xy$$

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $xyz$ | $xy\bar{z}$ | | |
| $\bar{x}$ | | | | |