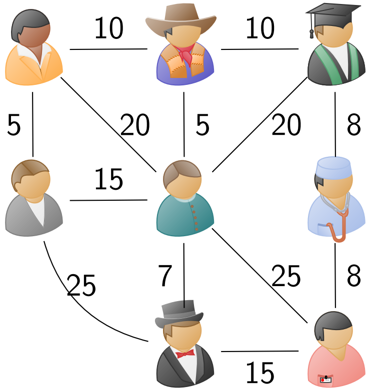
最小木

離散数学・オートマトン
2021 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

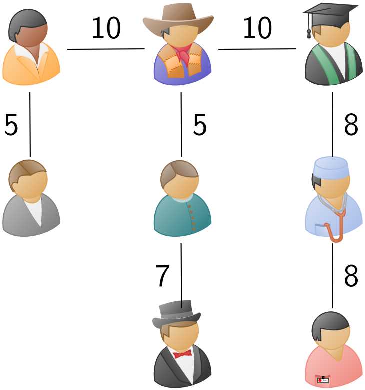
ネットワーク: Networks

- グラフの各辺に数値が対応したものをネットワークと呼ぶ
- 今日は、無向グラフの各辺に正の「重み」があるものを扱う

例 1: 最安の連絡経路



例 1: 解



最小木の応用例

- 連絡網
- 油井のネットワーク
  - 積出港へのパイプの長さを最小に
- 組織内のネットワーク配線

Jarník-Prim 法

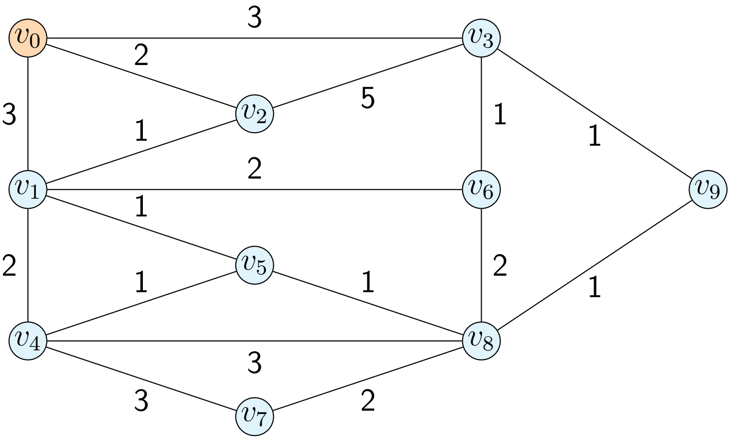
- 始点から開始して、連結した頂点の数を増やす
- 構成途中でも木になっている
- 構成途中の木から、未連結の頂点への辺のうちの重み最小の辺を選んで、枝を伸ばす
  - 長さの増分が最小

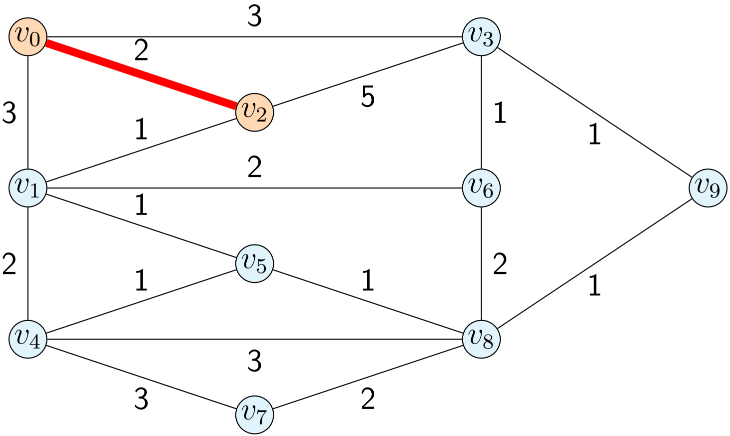
Jarník-Prim アルゴリズム

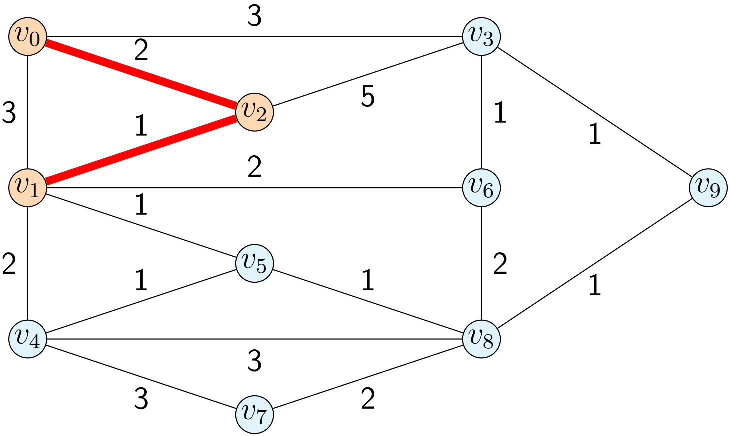
Algorithm 1 Jarník-Prim アルゴリズム

```
任意の頂点 v ∈ V を選び、U = {v}、T = ∅ とする
while U ≠ V do
    U と V \ U を結ぶ辺のうち、最初の重みのものを e とする
    e の V \ U 側の端点を w とする
    U.append(w)
    T.append(e)
end while
T が最小木を構成する
```

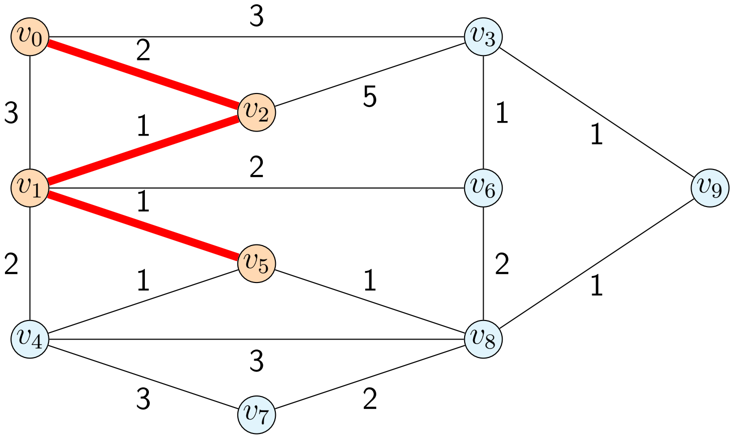
例 1

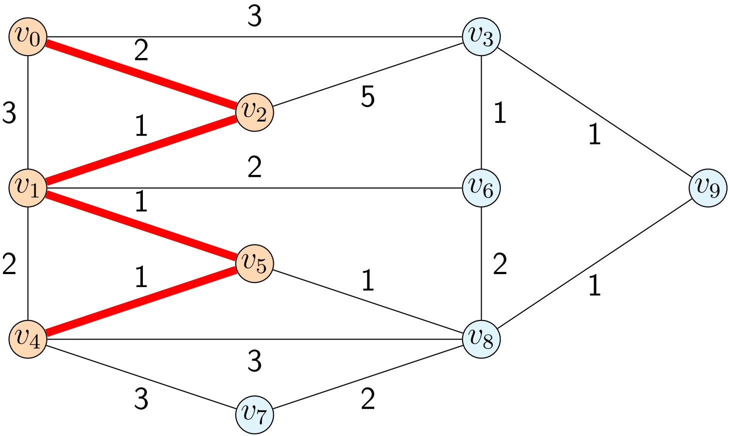


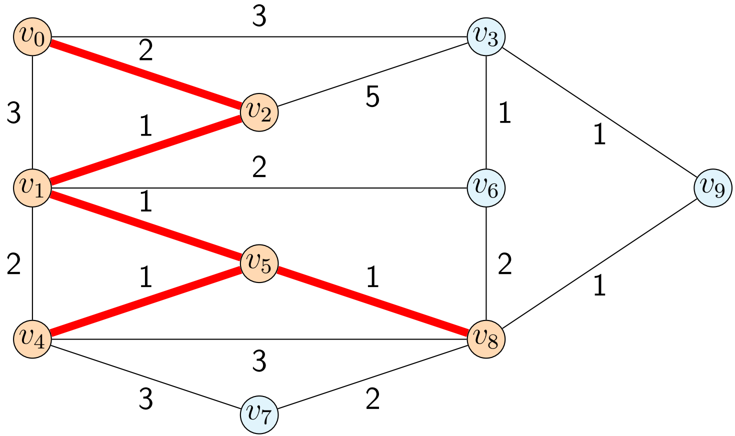

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2
1

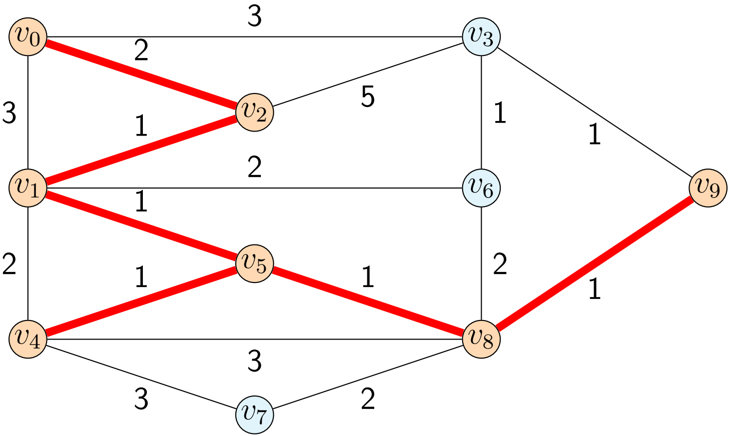


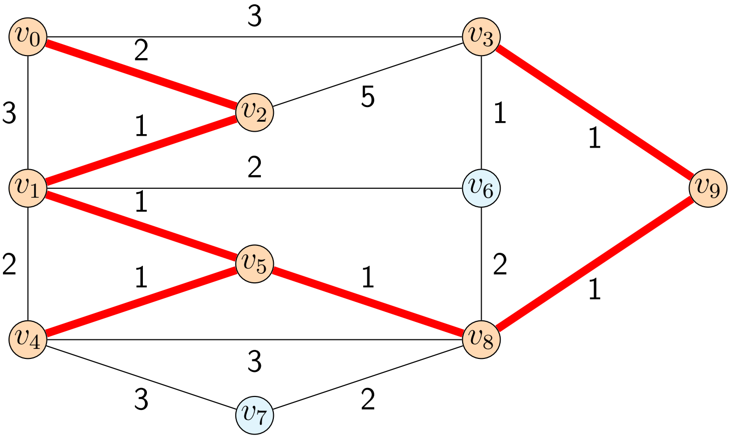
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
1
3
3
2


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
1
3
3
2
1

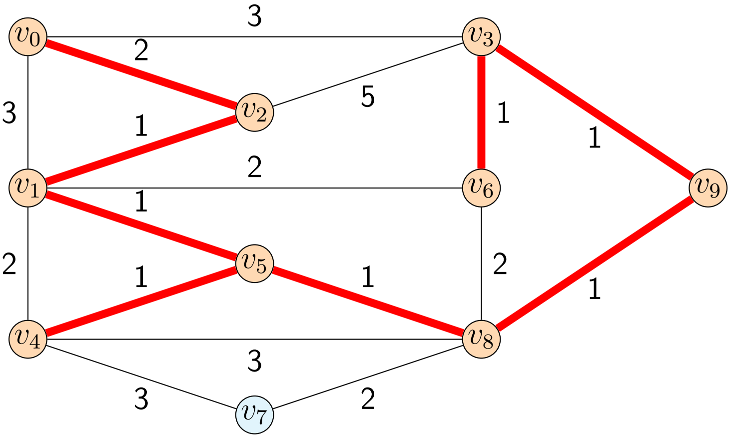

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
5
1
1
1
2
1
2
1
1
1
2
3
3
2


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

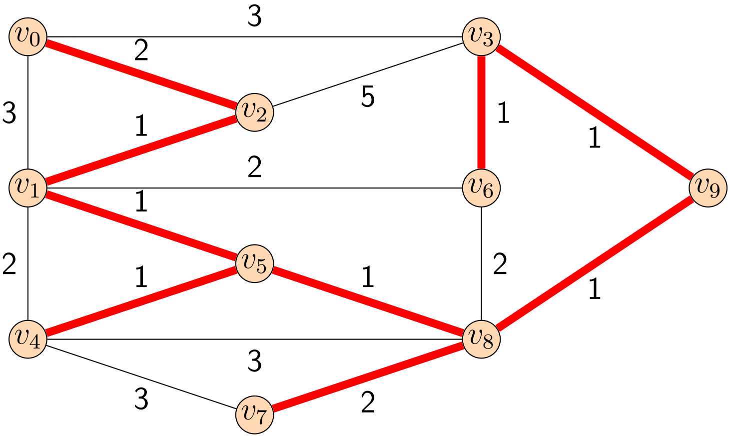

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
1
2
1
3
3
2



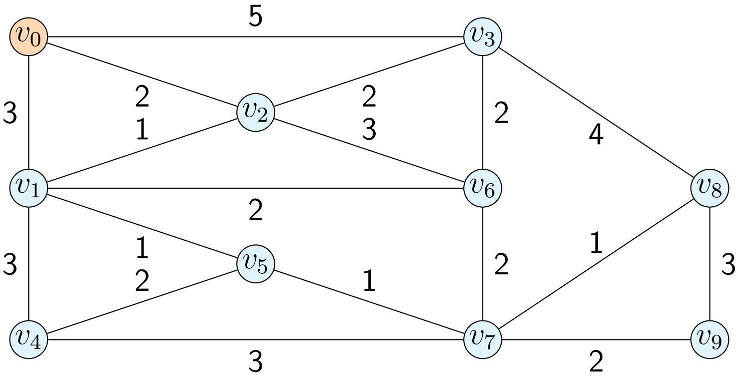
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
5
1
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

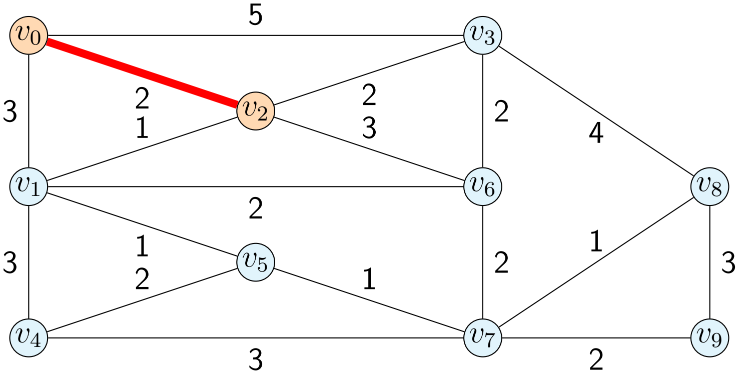


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

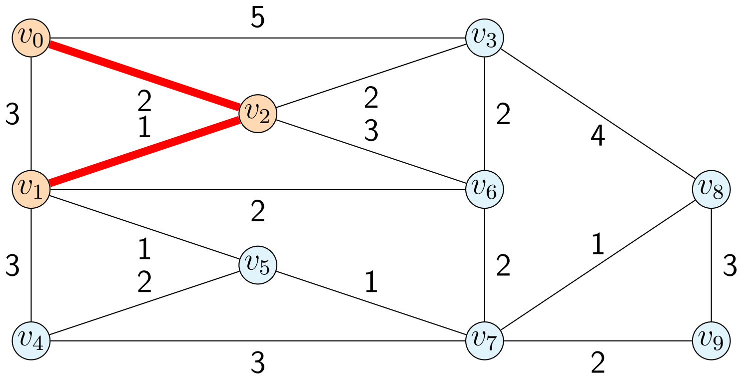

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

例 2

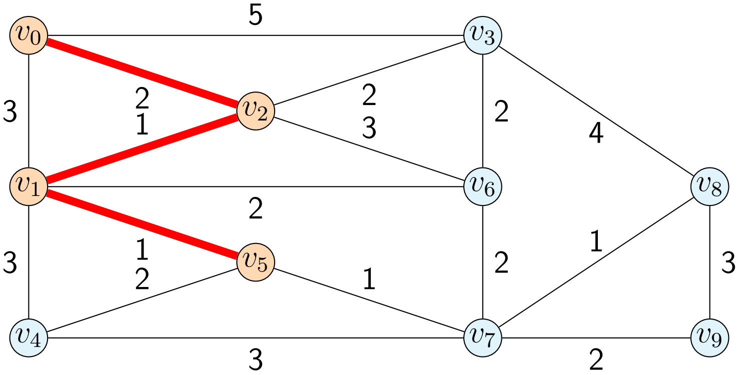


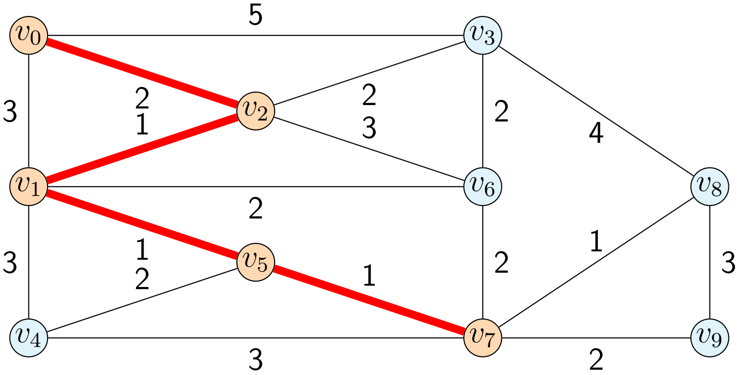


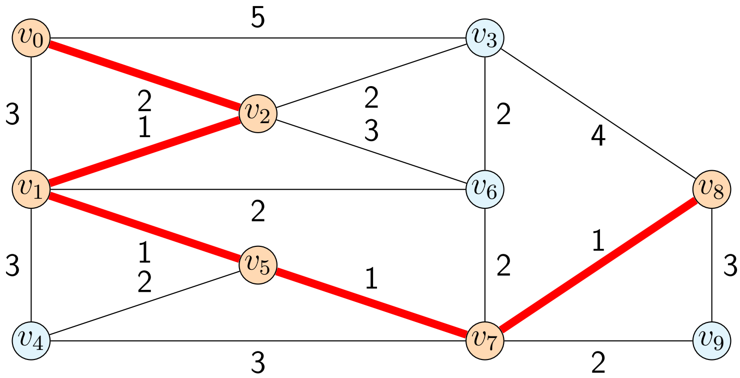
5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2

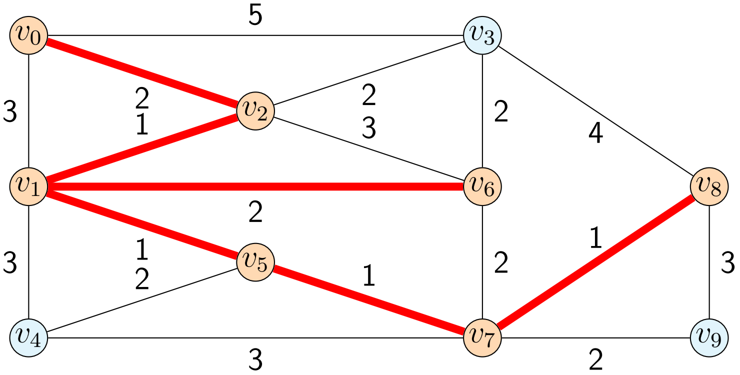


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
1
2
3
1
2
1
3
2

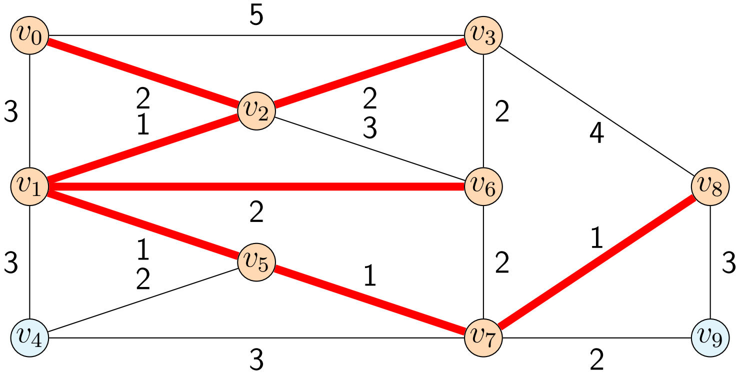

5
3
2
1
2
3
2
4
2
3
1
2
1
1
2
3
3
2
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9

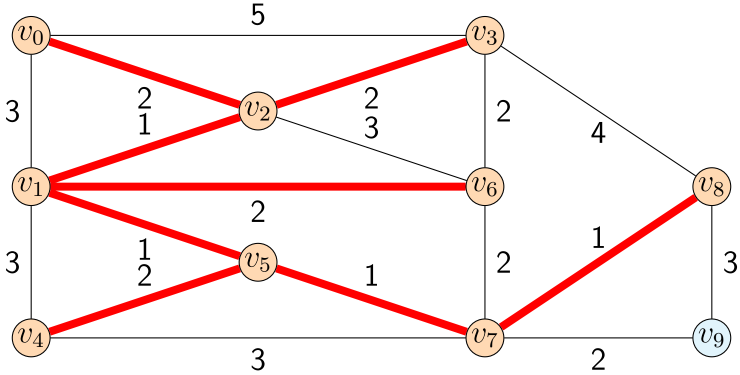

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
3
1
2
1
2
1
3
3
2

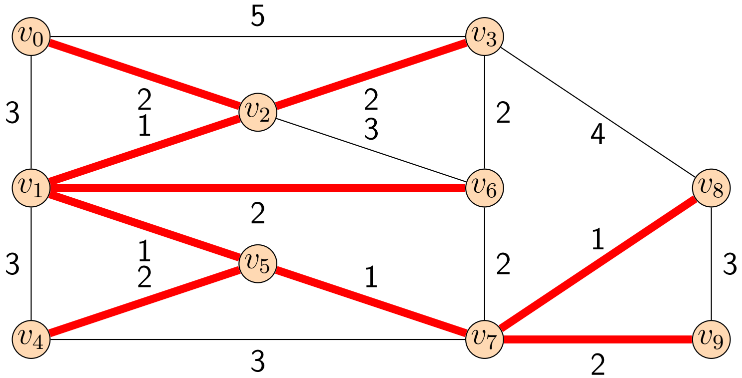

5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2



5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
3
1
2
1
1
2
3
3
2


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
3
1
2
1
2
1
3
3
2


5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2

例 2：途中プロセス

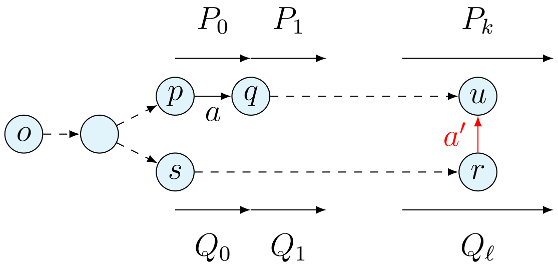
from	to	U
		$\{v_0\}$
v_0	v_2	$\{v_0, v_2\}$
v_2	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$
v_1	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_5\}$
v_5	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_5, v_7\}$
v_7	v_8	$\{v_0, v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$
v_1	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
v_2	v_3	$\{v_0, v_1, v_{2,3}, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
v_5	v_4	$\{v_0, v_1, v_{2,3}, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
v_7	v_9	$\{v_0, v_1, v_{2,3}, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

Jarník-Prim 法が正しいこと

- Jarník-Prim アルゴリズム実行中の木 T は、U が誘導する G の部分グラフ $G(U)$ における最小木になっていることを示す。
- 証明の方針:ある辺 $\exists a \in T$ を、別のある辺 $\exists a' \notin T$ に置き換えることで、より小さい木ができる

$$w(a') < w(a)$$

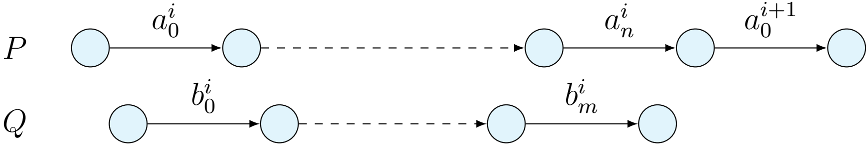
ことを仮定して、矛盾を導く。



- o を根とする木 T において、辺 $a \in T$ の代わりに辺 $a' \notin T$ としたときに、重みが小さくなると仮定する。

$$w(a') < w(a)$$

- 上の枝で、辺 a を先頭に連続して伸びた道を P_1 とし、その後に下の枝で連続して伸びた道を Q_1 とする。その後、P_2、Q_2 と交互に伸びるとする。他の道は無視する。
- 辺 a' の両端の頂点は道 P_k と Q_ℓ に属しているとする。



- P_i を構成する辺 $\{a_0^i, a_1^i, \cdots, a_n^i\}$
- Q_j を構成する辺 $\left\{b_0^j, b_1^j, \cdots, b_m^j\right\}$
- P_i の後で Q_j 伸びることから
  - P_i が伸びている最中は Q_j は伸び始めない
  - Q_j が伸びている最中は、P_i の次 P_{i+1} は伸び始めない

$$\forall i, \forall j, w(a_j^i) \leq w(b_0^i), w(b_j^i) \leq w(a_0^{i+1})$$

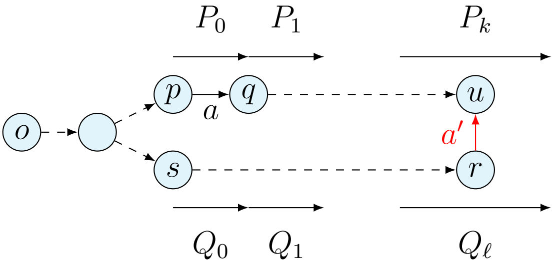
- 各道 P_i 及び Q_i の先頭の辺に注目

$$\forall i, w(a_0^i) \leq w(b_0^i) \leq w(a_0^{i+1})$$

- 各道の先頭の辺の重みは以下を満たす

$$\forall i, w(a) \leq w(a_0^i), w(a) \leq w(b_0^i)$$

$k \leq \ell$

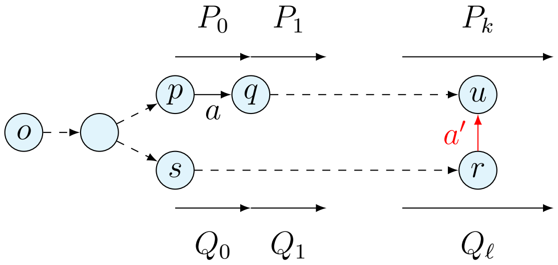


- 上の道が、頂点 u まで伸びたとき、下の道は頂点 r まで伸びていない
- 上の道 P_k が伸びるとき、辺 a' は採用されないことから、

$$w(a) \leq w(b_0^k) \leq w(a')$$

となり、矛盾

$k > \ell$



- 上の道が、頂点 u まで伸びたとき、下の道は頂点 r を過ぎて伸びている
- 下の道 Q_ℓ が伸びるとき、辺 a' は採用されないことから、

$$w(a) \leq w(a_0^{\ell+1}) \leq w(a')$$

となり、矛盾