

有限オートマトン

離散数学・オートマトン
2021 年後期

佐賀大学工学部 只木進一

- ① 序論
- ② 決定性有限オートマトン
- ③ 受理言語
- ④ 非決定性有限オートマトン
- ⑤ 疑問

オートマトンと形式言語

- オートマトン (Automaton)
 - 計算の抽象モデル
 - 「計算する」とは何か？
- 形式言語 (Formal Language)
 - オートマトンの入力として正しい言語
 - 文法を数学的に分析

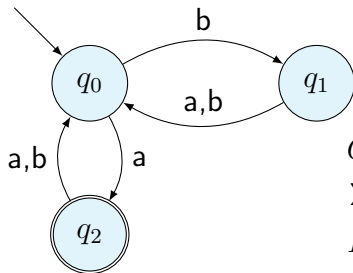
決定性有限オートマトン

Deterministic Finite State Automata : DFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad (1)$$

- Q : 内部状態の有限集合
- Σ : 入力アルファベット、つまり入力記号の集合
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: 状態遷移関数
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態の集合

例 1



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

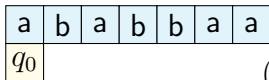
$$F = \{q_2\}$$

遷移関数

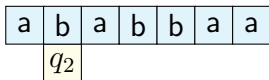
δ	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_0	q_0
q_2	q_0	q_0

動作イメージ

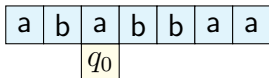
テープヘッドが移動して、テープ上の文字を読み取る。



$$(q_0, ababbaa) \vdash_M (q_2, babbaa)$$



$$(q_2, babbaa) \vdash_M (q_0, abbaa)$$



\vdash_M の推移的閉包と受理言語

- 入力 $w \in \Sigma^*$ (Σ^* は Σ の要素の 0 個以上の列) によって、初期状態 q_0 から状態 q へ遷移し、テープに残っている文字列が w'

$$(q_0, w) \vdash_M^* (q, w') \quad (2)$$

- 入力 w を受理

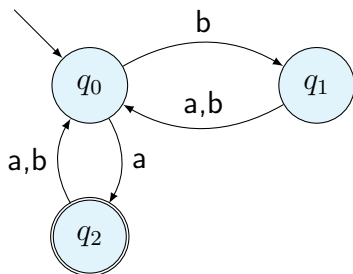
$$(q_0, w) \vdash_M^* (q_F, \epsilon), \quad q_F \in F \quad (3)$$

- 受理言語

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (q_F, \epsilon), \quad q_F \in F\} \quad (4)$$

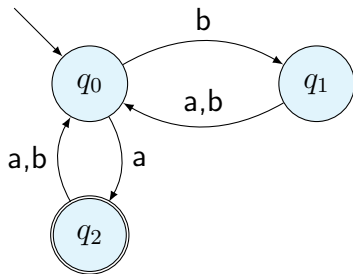
DFA が受理言語を定める

例 1



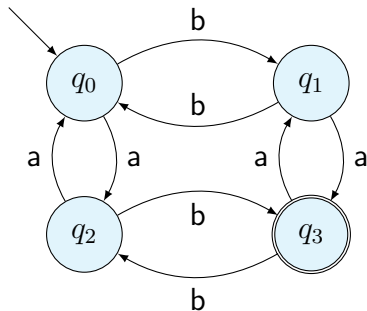
$$\begin{aligned}
 (q_0, aaaba) \vdash (q_2, aaba) \vdash (q_0, aba) \\
 \vdash (q_2, ba) \vdash (q_0, a) \vdash (q_2, \epsilon) \\
 (q_0, babaa) \vdash (q_1, abaa) \vdash (q_0, baa) \\
 \vdash (q_1, aa) \vdash (q_0, a) \vdash (q_2, \epsilon)
 \end{aligned}$$

受理する入力の実例



a, aaa, aba, baa, bba,
aaaaa, aaaba, abaaa,
babaa, babba, bbbaa, bbbba

例 2



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

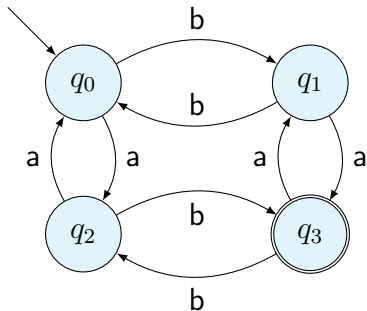
$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$F = \{q_3\}$$

遷移関数

δ	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

例 2 : 動作例

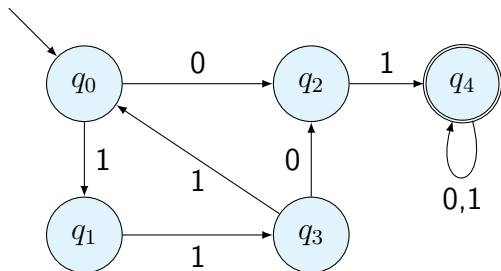


$$\begin{aligned}
 (q_0, aaaaab) \vdash (q_2, aaaab) \vdash (q_0, aaab) \vdash (q_2, aab) \\
 \vdash (q_0, ab) \vdash (q_2, b) \vdash (q_3, \epsilon) \\
 (q_0, abbaba) \vdash (q_2, bbaba) \vdash (q_3, baba) \vdash (q_2, aba) \\
 \vdash (q_0, ba) \vdash (q_1, a) \vdash (q_3, \epsilon)
 \end{aligned}$$

例 2: 受理する文字列例 (長さ 5 まで)

a, ab, ba, aaa, abb, bab, bba, aaab, aaba, abaa, abbb, baaa, babb,
bbab, bbba, aaaaa, aaabb, aabab, aabba, abaab, ababa, abbaa,
abbbb, baaab, baaba, babaa, babbb, bbaaa, bbabb, bbbab, bbbba

例 3



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

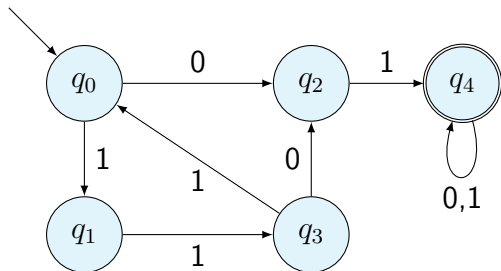
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$F = \{q_4\}$$

遷移関数

δ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1		q_3
q_2		q_4
q_3	q_2	q_0
q_4	q_4	q_4

例 3：動作例



$$\begin{aligned}
 &(q_0, 1110101) \vdash (q_1, 110101) \vdash (q_3, 10101) \vdash (q_0, 0101) \\
 &\quad \vdash (q_2, 101) \vdash (q_4, 01) \vdash (q_4, 1) \vdash (q_4, \epsilon) \\
 &(q_0, 1101010) \vdash (q_1, 101010) \vdash (q_3, 01010) \vdash (q_2, 1010) \\
 &\quad \vdash (q_4, 010) \vdash (q_4, 10) \vdash (q_4, 0) \vdash (q_4, \epsilon)
 \end{aligned}$$

例 3: 受理する文字列例 (長さ 5 まで)

01, 010, 011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1101, 01000, 01001, 01010,
01011, 01100, 01101, 01110, 01111, 11010, 11011, 11101

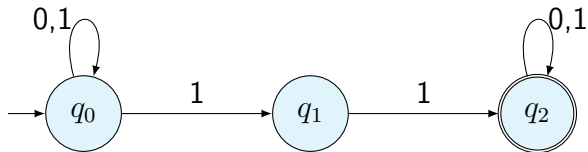
非決定性有限オートマトン

Non-deterministic Finite State Automata : NFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad (5)$$

- Q : 内部状態の集合
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$: 状態遷移関数。
 2^Q は、 Q のべき集合、つまり Q の部分集合の族。遷移先が複数であることに注意。
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

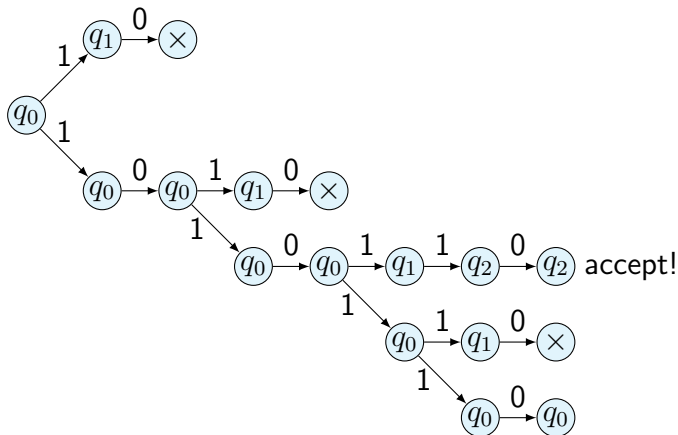
例 1



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad F = \{q_2\}$$

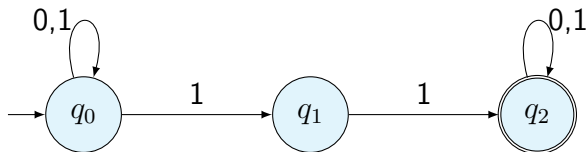
δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	\emptyset	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

動作例: 入力 1010110



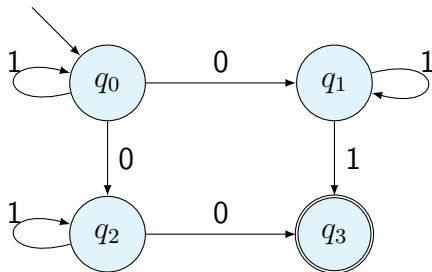
入力が引き起こす状態遷移のうちで、受理状態に至る場合があれば、その入力を受理する。

長さ 5 以下の受理入力



11, 011, 110, 111, 0011, 0110, 0111, 1011, 1100, 1110, 1111, 00011,
00110, 00111, 01011, 01100, 01110, 01111, 10011, 10110, 10111,
11000, 11011, 11100, 11110, 11111

例 2



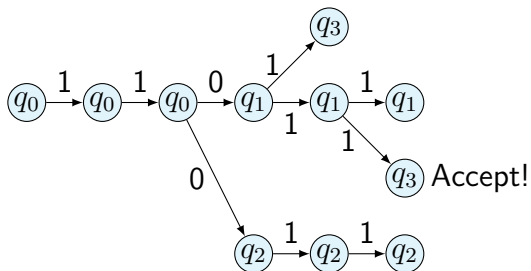
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad F = \{q_3\}$$

δ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	\emptyset	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_3	\emptyset	\emptyset

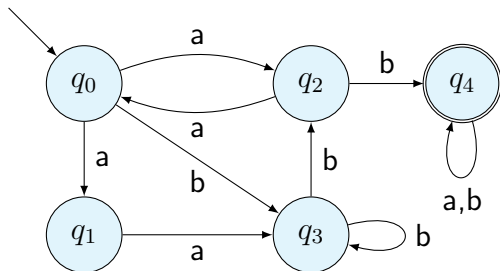
長さ 5 以下の受理入力

00, 01, 010, 011, 100, 101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1100, 1101,
01110, 01111, 10110, 10111, 11010, 11011, 11100, 11101

動作例:入力 11011



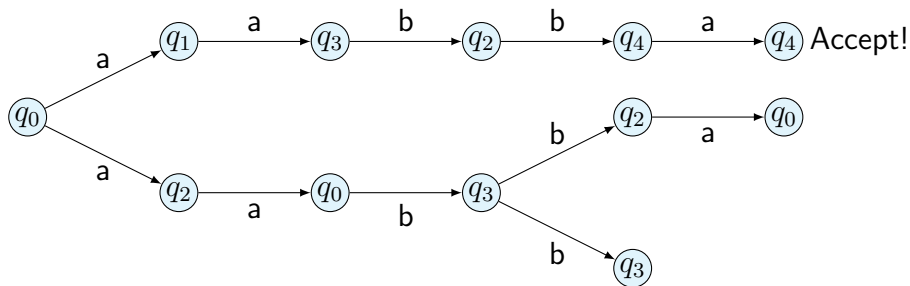
例 3



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = \{a, b\}, F = \{q_4\}$$

δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_3\}$	\emptyset
q_2	\emptyset	$\{q_4\}$
q_3	\emptyset	$\{q_2, q_3\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

動作例: 入力 aabba



疑問

- オートマトンが受理する文字列の集合を記述する方法
 - 文字列パターンを記述する方法
- NFA と DFA は本質的に異なるのか
 - 受理する文字列集合は異なるのか