

# チューリングマシン

離散数学・オートマトン  
2021 年後期  
佐賀大学工学部 只木進一

- 1 序論
- 2 Turing マシン
- 3 句構造文法: Phase Structure Grammar
- 4 列挙
- 5 停止問題・決定問題

# 更に強力なオートマトンが必要？

- PDA では、 $\{a^n b^n c^n | n \in N\}$  を受理できない
  - スタックの制約から
- 自由に読み書きできる「メモリ」をモデル化したい
- Church の提唱
  - 計算できる関数とは、その関数を計算する Turing マシンが存在する関数である。
  - Turing マシンを、計算できる関数と同等とみなす

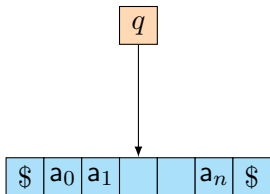
# Turing という人

- Alan Turing (1912 – 1954)
- もともとは数学者
- 第2次世界大戦中に、暗号解読に従事
- Manchester Mark I などの開発に従事
- Turing Test: 人工知能と人を見分ける
- 数理生物学や化学反応にも関心
  - Turing pattern など
- 「イミテーション・ゲーム」

<https://www.britannica.com/biography/Alan-Turing>

## Turing マシン

- 読み書きできる無限長のテープ
- \$ は、テープの空白 (何も書いていない) を表す特別な記号
  - テープへは無限に書くことができる
  - \$ は、その外側には何も書いていないことを表す記号



両方に無限に長いテープ

$$M = \langle Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \$, F \rangle$$

- $Q$ : 内部状態の有限集合
- $\Gamma$ : テープ上のアルファベット
- $\Sigma \subseteq \Gamma$ : 入力アルファベット
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ 
  - テープへ書き込み可能
  - $\{L, R\}$  は、テープヘッドの左右への移動
- $q_0 \in Q$ : 初期状態
- $\$ \in \Gamma \setminus \Sigma$ : テープ上の空白記号
- $F \subseteq Q$ : 受理状態の集合

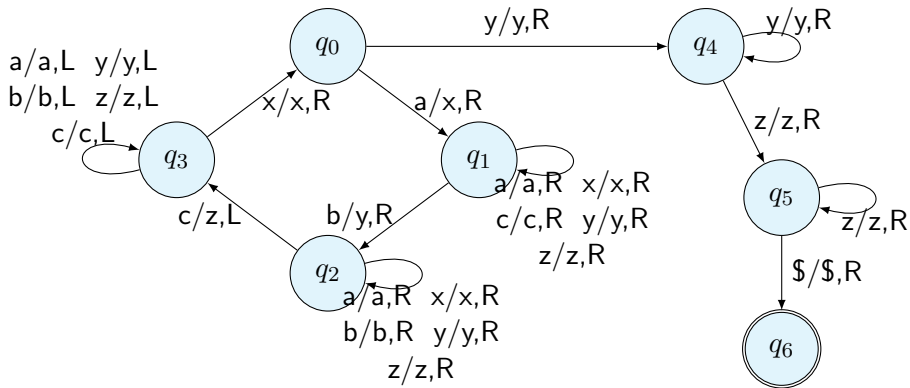
例:  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$$

$$F = \{q_6\}$$

$$\Gamma = \{a, b, c, x, y, z, \$\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$





## 動作

$\$q_0aabbcc\$ \vdash \$xq_1abbcc\$ \vdash \$xaq_1bbcc\$$   
 $\vdash \$xayq_2bcc\$ \vdash \$xaybq_2cc\$$   
 ここまで、a、b、c  $\vdash \$xayq_3bzc\$ \vdash \$xaq_3ybzc\$$   
 を一つずつ x、y、z に  $\vdash \$xq_3aybzc\$ \vdash \$q_3xaybzc\$$   
 置き換え  $\vdash \$xq_0aybzc\$$  全ての、a、b、c を  
 $\vdash \dots \vdash \$xq_3xyyzz\$$  x、y、z に置き換え  
 $\vdash \$xxq_0yyzz\$ \vdash \$xxyq_4yzz\$$   
 $\vdash \$xxyyq_4zz\$ \vdash \$xxyyzq_5z\$$   
 $\vdash \$xxyyzzq_5\$ \vdash \$xxyyzz\$q_6$

## 動作失敗

$$\begin{aligned}
 & \$q_0 a a b b c \$ \vdash \$x q_1 a b b c \$ \vdash \$x a q_1 b b c \$ \\
 & \vdash \$x a y q_2 b c \$ \vdash \$x a y b q_2 c \$ \\
 & \vdash \$x a y q_3 b z \$ \vdash \$x a q_3 y b z \$ \\
 & \vdash \$x q_3 a y b z \$ \vdash \$q_3 x a y b z \$ \\
 & \vdash \$x q_0 a y b z \$ \vdash \$x x q_1 y b z \$ \\
 & \vdash \$x x y q_1 b z \$ \vdash \$x x y y q_2 z \$ \\
 & \vdash \$x x y y z q_2 \$ \vdash \$x x y y z \$ q_2
 \end{aligned}$$

# 句構造文法: Phase Structure Grammar

- Turing マシンに対応する文法
- 生成規則

$$P : (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \rightarrow (N \cup \Sigma)^*$$

- 文脈依存であることに注意
  - 左辺が  $N$  を必ず含む  $N$  または  $\Sigma$  の列

例:  $L = \{a^n b^n c^n | n \in N\}$

$$N = \{S, A, B, C, D\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow aAD, & A \rightarrow aAbB, & A \rightarrow C, & \\ Bb \rightarrow bB, & Cb \rightarrow bC, & BD \rightarrow Dc, & CD \rightarrow bc \end{array}$$

## 導出例

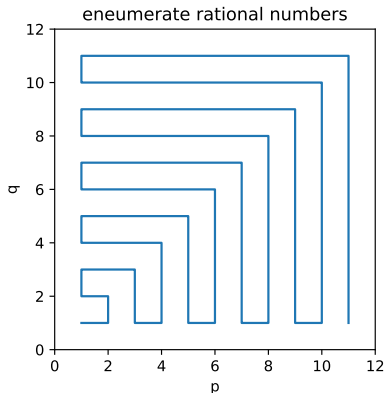
$$S \Rightarrow aAD \Rightarrow aCD \Rightarrow abc$$

$$\begin{aligned} S \Rightarrow aAD &\Rightarrow aaAbBD \Rightarrow aaAbDc \Rightarrow aaC'bDc \\ &\Rightarrow aabCDc \Rightarrow aabbcc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \Rightarrow aAD &\Rightarrow aaAbBD \Rightarrow aaaAbBbBD \\ &\Rightarrow aaaC'bBbBD \Rightarrow aaabCBbBD \Rightarrow aaabC'bBBD \\ &\Rightarrow aaabbCBBD \Rightarrow aaabbCBDc \Rightarrow aaabbCDcc \\ &\Rightarrow aaabbbccc \end{aligned}$$

# 無限を数える: 正の有理数を列挙する

- 有理数と自然数は同じ数だけ存在する
- 全ての有理数に異なる自然数を対応づけることができる



# 無限を数える: 無理数は列挙できない

- $x \in [0, 1)$  が列挙できると仮定

$$1 \leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$$

$$2 \leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$$

$$3 \leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$$

$$4 \leftrightarrow 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots$$

- $y = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots (b_i \neq a_{ii})$  は列挙したリストに含まれない
  - 列挙できるならば、上記リストに含まれている
- 列挙できるという仮定と矛盾
- 対角線論法 (diagonal method)

# Gödel ナンバリング

- Turing マシンを列挙する
  - アルファベット、状態を整数と対応付け
  - 遷移関数は、整数から整数への写像
  - Turing マシンも整数に対応させることができる
- Turing マシンそのものを入力とすることが可能であることに注意
  - Turing マシンの動作を模倣する**万能 Turing マシン**が存在できる



# Turing マシンの停止問題

- Turing マシンとは
  - テープ上の入力に対して、結果をテープに残す。
  - テープに残ったものが関数の値。
  - テープ上の入力に対する関数と考える
- 必ず停止するか？
  - 関数の値をテープに書いて、停止するか？
- これから問題とするのは
  - 答えはあるのに、計算で答えを求められない問題の存在

# 決定問題: decision problems

- 答えが yes/no のいずれかである問題: 述語
- 例:  $x^2 + y^2 = z^2$  を満たす自然数の組  $(x, y, z)$  は存在するか?
  - $(x, y, z)$  は列挙可能であるため、順に生成できる
  - $x^2 + y^2 = z^2$  に代入し、等号が成立する場合に、yes を返して、停止
  - 例えば、 $(x, y, z) = (3, 4, 5)$  を見つけて停止

## 決定可能:decidable

- ある Turing マシン  $M$  が、決定問題  $P$  の具体例  $w$  に対して、答えを出して停止する
  - 前のシートの例は、停止する
- $x^3 + y^3 = z^3$  を満たす自然数の組  $\{x, y, z\}$  を見つける問題では、前のシートの方法では停止しない
  - Fermat の最終定理: $x^n + y^n = z^n$  ( $n > 2$ ) を満たす整数の組  $\{x, y, z\}$  は存在しない

# 停止問題

- 任意の Turing マシン  $M$  に対して、入力  $w$  を与えると停止するか
  - これ自体が述語  $f(M, w)$
- Turing マシンの停止問題は決定不能

- Turing マシンとその入力は列挙できることに注意

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & M_i \text{は、入力 } x_j \text{ に対して停止} \\ 0 & M_i \text{は、入力 } x_j \text{ に対して停止しない} \end{cases}$$

- 停止問題を解く Turing マシン  $\tilde{M}$  が存在すると仮定
  - 任意の  $x_i$  に対して、 $a_{ii} = 0$  のとき、かつそのときだけ停止する Turing マシン  $M_d$  に対して、 $\tilde{M}$  が停止を判断できる
  - $M_d$  自体が、列挙した  $M_i$  のいずれか
- $M_d$  を  $M_j$  とする
  - $a_{jj} = 1$  ならば、 $M_j$  は停止するが、 $M_d$  は停止しないことになる
  - $a_{jj} = 0$  ならば、 $M_j$  は停止せず、 $M_d$  は停止することになる
- 矛盾するため、 $\tilde{M}$  は存在できない

# 停止問題が決定不能とは

- 停止問題
  - 述語  $w$  の値  $f(w)$  を決定する
- 停止問題が決定不能
  - 命題  $w$  の真偽を判定できない場合がある
- 正しく設定された述語  $f(w)$  は、真か偽のいずれかである。しかし、判定できない場合がある
- 数学であっても、計算によって証明できない命題が存在しうる