「離散数学・オートマトン」演習問題 04 （解答例)

2021/10/26

1　関係

課題 1　N 上の関係 R と S を

$$R = \{(m, n) \mid m = 2n\} \tag{1.1}$$
$$S = \{(m, n) \mid m = n + 3\} \tag{1.2}$$

とするとき、$R \circ S$、R^2、R^{-1} を求めなさい。

解答例

- $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$ は

  $$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, x = z + 3 \wedge z = 2y\}$$

  である。これより以下を得る。

  $$R \circ S = \{(m, n) \mid m = 2n + 6\}$$

- $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$ は

  $$R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, x = 2z \wedge z = 2y\}$$

  である。これより以下を得る。

  $$R \circ R = \{(m, n) \mid m = 4n\}$$

- $$R^{-1} = \{(m, n) \mid 2m = n\}$$

課題 2　$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ 上の関係を考える。

$$R = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{d}), (\mathrm{c}, \mathrm{d}), (\mathrm{d}, \mathrm{b})\} \tag{1.3}$$

$R^i = R^j$ となる最小の $i \neq j$ の組を求めよ。また、R^* を求めよ。

解答例 R^2 を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}R\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{a} &\Rightarrow \mathrm{a}R^2\mathrm{a} \\
\mathrm{a}R\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{a}R^2\mathrm{b} \\
\mathrm{a}R\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{a}R^2\mathrm{d} \\
\mathrm{b}R\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{b}R^2\mathrm{b} \\
\mathrm{c}R\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{c}R^2\mathrm{b} \\
\mathrm{d}R\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{d}R^2\mathrm{d}
\end{aligned}$$

同様に R^3 と R^4 を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}R^2\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{a} &\Rightarrow \mathrm{a}R^3\mathrm{a} \\
\mathrm{a}R^2\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{a}R^3\mathrm{b} \\
\mathrm{a}R^2\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{a}R^3\mathrm{d} \\
\mathrm{b}R^2\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{b}R^3\mathrm{d} \\
\mathrm{c}R^2\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{c}R^3\mathrm{d} \\
\mathrm{d}R^2\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{d}R^3\mathrm{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}R^3\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{a} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{a} \\
\mathrm{a}R^3\mathrm{a} \wedge \mathrm{a}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{a}R^3\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{d} \\
\mathrm{a}R^3\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{a}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{b}R^3\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{b}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{c}R^3\mathrm{d} \wedge \mathrm{d}R\mathrm{b} &\Rightarrow \mathrm{c}R^4\mathrm{b} \\
\mathrm{d}R^3\mathrm{b} \wedge \mathrm{b}R\mathrm{d} &\Rightarrow \mathrm{d}R^4\mathrm{d}
\end{aligned}$$

以上から $R^2 = R^4$ を得る。従って、$R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3$ となる。しかし、R^3 の要素は $R^0 \cup R \cup R^2$ に含まれているため、$R^* = R^0 \cup R \cup R^2$ で十分である。

$$\begin{aligned}
R^* &= \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{d},\mathrm{d})\} \cup \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{b},\mathrm{d}),(\mathrm{c},\mathrm{d}),(\mathrm{d},\mathrm{b})\} \\
&\quad \cup \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{a},\mathrm{d}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{b}),(\mathrm{d},\mathrm{d})\} \\
&= \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{d},\mathrm{d}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{a},\mathrm{d}),(\mathrm{b},\mathrm{d}),(\mathrm{c},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{d}),(\mathrm{d},\mathrm{b})\}
\end{aligned}$$

この課題に対応するコードは、以下の Github から取得できます。

`https://github.com/discrete-math-saga/RelationsAndOrder/`

2 順序

課題 3　全体集合 U を考える。その部分集合 $A \subseteq U$ に対する関係 $\subseteq$ は、半順序であって全順序でないことを示せ。

解答例　はじめに、反射律、推移律、反対称律を示し、半順序であることを示す。

- 反射律：ある集合 A について、$A \subseteq A$ は明らか
- 推移律：$C \subseteq B \land B \subseteq A$ ならば、$C \subseteq A$ である。
- 反対称律：$B \subseteq A \land A \subseteq B$ ならば、$A = B$ である。

次に、二つの集合 $A \subseteq U$ と $B \subseteq U$ を考える。$A \cap B$ が A または B と等しくない場合、A と B の間には関係 $\subseteq$ は成り立たない。つまり、関係 $\subseteq$ は全順序ではない。