

学籍番号										氏名
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「離散数学・オートマトン」確認テスト

2021/10/26

問1 集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, d), (c, d)\} \quad (1)$$

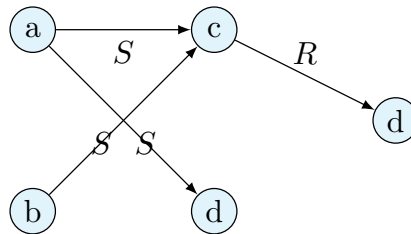
$$S = \{(a, c), (a, d), (b, c)\} \quad (2)$$

に対して、 $R \circ S$ 、 R^2 、 S^2 を求めよ。

解答例

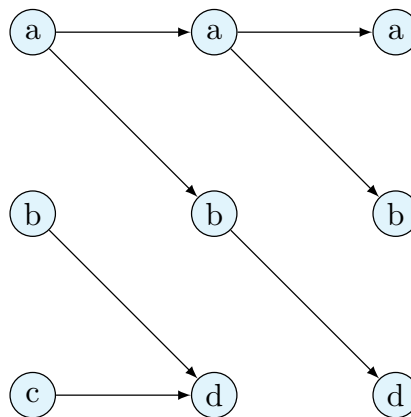
- $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$ であることから

$$R \circ S = \{(a, d), (b, d)\}$$



- $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$ であることから

$$R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$$



- $S^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zSy\}$ であることから

$$S^2 = \emptyset$$

問 2 N 上の関係 R を $nRm = \{(n, m) \mid m \bmod n = 0\}$ 、つまり n は m を割り切る、で定義する。このとき、 R は、 N 上の半順序であって、全順序でないことを示しなさい。

解答例 はじめに、反射律、推移律、反対称律を示すことで半順序であることを示す。

- 反射律： $\forall n \in N$ に対して nRn は明らか
- 推移律： nRm かつ mRl とは、 m が n の倍数であり、かつ l が m の倍数であることである。従って、 l は n の倍数となり、 nRl が成り立つ。
- 反対称律： nRm かつ mRn とは、 m が n の倍数であり、かつ n が m の倍数であることである。つまり、 $n = m$ である。

以上から、半順序であることが分かった。

N の任意の要素の組 (x, y) に対して関係 R を考えると、関係が成立しない組を例示することができる。例えば、 $(3, 5)$ と $(5, 3)$ のいずれにも関係 R は成立しない。つまり、関係 R は全順序ではない。