命題と述語

離散数学・オートマトン
2022 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. 命題: Propositions
2. 論理演算: logical operations
3. 述語: predicates
4. 述語と論理演算: predicates and logical operations

命題: Propositions

- 言明 (statements): ある事実を述べたもの
  - 真（true, 正しい)、偽（false, 正しくない)
- 命題 (propositions): 真偽が定まる言明
- 真理値/論理値 (truth/logical values)
  - T (true) または F (false)

例 1.1: 簡単な命題

- 7 は素数である: T
- 整数の積は整数である: T

$$\forall x \in Z, \forall y \in Z, \exists z \in Z \Rightarrow xy = z \tag{1.1}$$

- $2 + 3 = 6$: F
- 任意の自然数は、1 を除いて、一つまたはそれ以上の素数の積として一意に表すことができる (算術の基本定理): T

論理積 (logical and) と論理和 (logical sum)

- 二つの命題 p と q
- 論理積: $p \wedge q$ and かつ
  - 二つの命題がいずれも成り立つとき真
- 論理和: $p \vee q$ or または
  - 二つの命題のいずれか一方が成り立つとき真
- 排他的論理和 (exclusive or): $p \oplus q$ xor
  - 二つの命題のいずれか一方だけが成り立つとき真

真理値表 (truth table)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F

Python で真理値表を作る

```python
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        x = p and q
        y = p or q
        z = p ^ q
        m = f'{p}:{q}:{x}:{y}:{z}'
        print(m)
```

xor

出力

```
True:True:True:True:False
True:False:False:True:True
False:True:False:True:True
False:False:False:False:False
```

p は q を含意する

- p が成り立つならば、q が成り立つ

$$p \Rightarrow q \tag{2.1}$$

- p を前提（仮定）、 q を結論という。
- 「p は q を含意する」(p implies q)

imply

p と q は論理的に等しい

- p が成り立つとき、かつその時に限って、q が成り立つ

$$p \Leftrightarrow q \tag{2.2}$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \tag{2.3}$$

- p と q は同値 (logically equivalent)
- p と q は論理的に等しい

命題の「逆 (opposite)」、「裏 (inverse)」、「対偶 (contrapositive)」

- 命題 $p \Rightarrow q$ の逆 (opposite): $q \Rightarrow p$
- 命題 $p \Rightarrow q$ の裏 (inverse):$\neg p \Rightarrow \neg q$
- 命題 $p \Rightarrow q$ の対偶 (contrapositive): $\neg q \Rightarrow \neg p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Python で確認

```python
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        x = (not p) or q
        m = f'{p}:{q}:{x}'
        print(m)
```

結果

```
True:True:True
True:False:False
False:True:True
False:False:True
```

対偶証明法: proof by contraposition

- 命題 $p \Rightarrow q$ をその対偶 $\neg q \Rightarrow \neg p$ を証明することで示す

例 2.1: 対偶証明法
m 及び n が奇数 $\Rightarrow p = mn$ は奇数

- 対偶: $p = mn$ が偶数のとき、m と n の少なくとも一方は偶数である
- 証明
  - $p = 2m'n'$ と書き直す
  - $m' = m$ ならば $n = 2n'$ となり偶数である
  - $n' = n$ ならば $m = 2m'$ となり偶数である

背理法: proof by contradiction

- 結果を否定することにより、矛盾を導く

例 2.2: 背理法
合成数 (1 より大きい素数でない自然数)n は、$\sqrt{n}$ 以下の素因子を持つ

- n が $\sqrt{n}$ 以下の素因子を持たないと仮定。
- $n = pq \ \ (1 < p \leq q < n)$ と分解
- $n = pq \geq p^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geq p$
- p が素数ならば、仮定と矛盾
- p が素数で無いならば、更に因数分解可能
  - $p = rs(r$ は素数) とすると $\sqrt{n} \geq p \geq r$ となり、r という素因子があり、仮定と矛盾

de Morgan の法則

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \tag{2.4}$$

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \tag{2.5}$$

p	q	$\neg (p \vee q)$	$\neg (p \wedge q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T

述語: predicates

- T または F を値とする関数を述語という
  - 変数の値によって真偽が定まる
- 大文字の P、Q などで表記
- $P : X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{N-1} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$
  - $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{N-1}$ 上の述語
- $Q : X^n \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$
  - X 上の n 変数述語
- 命題: 変数の無い述語

例 3.1: 述語

二通りの記述方法を示す

$$P(x) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{if } x \geq 0 \\ \mathsf{F} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1}$$

それ以外

$$P(x) : x \geq 0 \tag{3.2}$$

$$P(1) = \mathsf{T}$$
$$P(0) = \mathsf{T}$$
$$P(-1) = \mathsf{F}$$

例 3.2: 述語

$$P(x, y, z) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{if } x^2 + y^2 = z^2 \\ \mathsf{F} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$P(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 \tag{3.4}$$

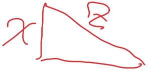
$$\begin{aligned} P(3, 4, 5) &= \mathsf{T} \\ P(5, 12, 13) &= \mathsf{T} \\ P(3, 3, 3) &= \mathsf{F} \end{aligned}$$

命題から命題を導出

述語　述語

- $P(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2$

  - x と y が直角三角形の直角を挟む二辺の長さであり、z がその三角形の斜辺の長さである場合に T となる。
- $Q(x, z) : \exists y P(x, y, z)$
  - 組 (x, z) に対して、ある y が存在して、$P(x, y, z) = \mathrm{T}$ となるとき、$Q(x, z) = \mathrm{T}$ となる。
  - つまり、(x, z) が直角三角形の直角を挟む一辺と斜辺の長さであるときに $Q(x, z) = \mathrm{T}$ となる。



例 4.1: 述語と論理演算

- $P(x)$: x は 2 の倍数

$x \% 2$

$$P(x) : x \bmod 2 = 0$$

modlan

$x | 2$

- $Q(x)$: x は 3 の倍数

$$Q(x) : x \bmod 3 = 0$$

x	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \land Q(x)$	$P(x) \lor Q(x)$
3	F	T	F	T
4	T	F	F	T
5	F	F	F	F
6	T	T	T	T

Python で確認

```
def P(x):
    return (x%2 == 0)
def Q(x):
    return (x%3 == 0)

for x in range(3, 7):
    a = P(x)
    b = Q(x)
    y = P(x) and Q(x)
    z = P(x) or Q(x)
    m = f'{x}:{a}:{b}:{y}:{z}'
    print(m)
```

```
def P(x):
  b = False
  if x%2 == 0:
    b = True
  return b

b=(x%2 ==0)
```

```
3:False:True:False:True
4:True:False:False:True
5:False:False:False:False
6:True:True:True:True
```