

# 数学的帰納法と再帰的定義

離散数学・オートマトン

2022 年後期

佐賀大学工学部 只木進一

- ① 自然数の定義: Definition of natural numbers
- ② 数学的帰納法: Mathematical induction
- ③ 累積帰納法: Course-of-values induction
- ④ 再帰的定義: Recursive definitions

# 自然数の定義: Peano の公理

- 集合  $N$  が以下の3つを満たすとき、 $N$ の要素を自然数という
  - $1 \in N$
  - 単射  $S : N \rightarrow N$  が存在。ただし  $1 \notin S(N)$  ( $1$  を  $S$  の値域に含めない)

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- $M \subseteq N$  が、以下を満たすとき  $M = N$

$$1 \in M$$

$$S(M) \subset M$$

# Peano の公理の意味

- $S(n)$  は  $n + 1$  に相当: 「後者」
- Peano の 2 番目の公理より

$$2 = S(1)$$

$$3 = S(2)$$

...

- Peano の 3 番目の公理
  - 1 を含む  $N$  の部分集合が  $N$  そのもの
  - つまり、1 から導出されたもの以外を含まない

# 数学的帰納法: Mathematical induction

- Peano の 3 番目の公理を「数学的帰納法の公理」と呼ぶ
- $P(x)$ ,  $x \in N$  に対する数学的帰納法
  - $P(1) = T$ : 帰納法の基礎
  - 任意に選んだ  $k$  に対して  $P(k) = T$  を仮定
  - 帰納ステップにより  $P(k+1) = T$  を示す

## 例 2.1:

## ● 命題

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2, \forall n \in N \cup \{0\} \quad (2.1)$$

●  $n = 0$ 

$$\text{LHS} = \sum_{k=0}^0 (2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$\text{RHS} = (0+1)^2 = 1$$

- ある  $n$  で命題 (2.1) が正しいと仮定し、 $n+1$  の場合も真であることを示す

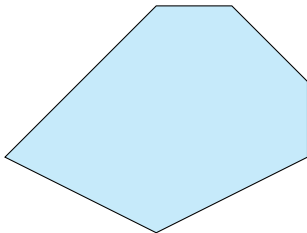
## 続き

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (2k + 1) &= \sum_{k=0}^n (2k + 1) + (2(n + 1) + 1) \\ &= (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 \\ &= ((n + 1) + 1)^2\end{aligned}\tag{2.2}$$

- $\sum_{k=0}^n (2k + 1)$  に対して、命題を適用している

## 例 2.2:

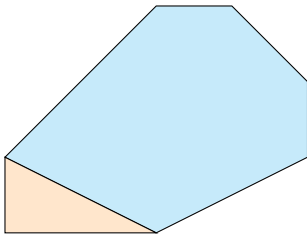
- 命題: 凸な正  $n$  角形の内角の和は  $A_n = (n - 2) \pi$  である。
- $n = 3$  の場合  $A_3 = \pi$  は自明
- ある  $n$  で正しいとする:  $A_n = (n - 2) \pi$





## 続き

- 一点追加する



$$A_{n+1} = A_n + \pi = ((n+1) - 2) \pi$$

## 例 2.3:

- 命題: 集合  $A$  の大きさ  $|A|$  に対して、 $|A| < \infty$  ならば  $|2^A| = 2^{|A|}$
- $|A| = 0$ 、つまり  $A = \emptyset$  の場合

$$\text{LHS} = |2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1$$

$$\text{RHS} = 2^{|A|} = 2^0 = 1$$

- $|A| = k$  の場合に命題が正しいと仮定し、新たに一つ要素 ( $b \notin A$ ) を追加した集合を  $B = A \cup \{b\}$  とする

## つづき

- $2^B$  の要素は、 $2^A$  の要素 ( $2^k$  個) と、 $2^A$  の各要素に  $b$  を加えたもの ( $2^k$  個) の全体

$$2^B = 2^A \cup \{s \cup \{b\} \mid s \in 2^A\} \quad (2.3)$$

- つまり

$$|2^B| = 2^k + 2^k = 2^{k+1} \quad (2.4)$$

$$2^{|B|} = 2^{|A|+1} = 2^{k+1} \quad (2.5)$$

## 例 2.4:

- $A = \{a, b\}$  の場合

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad (2.6)$$

$$|2^A| = 4 \quad (2.7)$$

$$2^{|A|} = 2^2 = 4 \quad (2.8)$$

- $B = A \cup \{c\}$  とする

$$2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \\ \cup \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \quad (2.9)$$

$$|2^B| = 8 \quad (2.10)$$

$$2^{|B|} = 2^3 = 8 \quad (2.11)$$

# 累積帰納法: Course-of-values induction

- 命題  $P(n)$ , ( $n \in N, n \geq n_0$ )
  - $P(n_0)$  が成り立ち
  - ある  $k$  に対して  $P(m)$ ,  $n_0 \leq m \leq k$  が成り立つならば  $P(k+1)$  も成り立つとき
  - 任意の  $n \geq n_0$  に対して  $P(n)$  が成り立つ

# 累積帰納法が正しいこと

- $k = n_0$  の場合、自明
- 累積帰納法は正しくないと仮定
  - 累積帰納法が正しくない最小の値を  $n_f > n_0$  とする
  - しかし、累積帰納法によって  $n_0 \leq m < n_f$  が正しいことから  $P(n_f)$  が導かれ、矛盾する

## 例 3.1: Fibonacci 数列

- Fibonacci 数列を漸化式で定義:  $f_{n+2}$  は、直前の  $f_{n+1}$  だけでなく  $f_n$  も使って定義されていることに注意

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (3.1)$$

- $f_n$  は次式となる

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.2)$$

- $n = 0$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0 \quad (3.3)$$

- $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) = 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$



ある  $n$  と  $n-1$  で、式 (3.2) が正しいと仮定して、一般式を導出

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left( 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left( 1 + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

## 例 3.2:

$$a_0 = 1 \quad (3.6)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n 2^k a_{n-k} \quad (3.7)$$

で定義する数列  $\{a_n\}$  の  $n \geq 1$  の一般項は

$$a_n = 2^{2n-1} \quad (3.8)$$

である。

## 証明

- $n = 1$

$$a_1 = \sum_{k=1}^1 2^k a_{n-k} = 2a_0 = 2 \quad (3.9)$$

- $\forall k (1 \leq k \leq n)$  で  $a_k = 2^{2k-1}$  であるとする。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n 2^k a_{n+1-k} + 2^{n+1} a_0 \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k+2(n+1-k)-1} + 2^{n+1} = 2^{2n+1} \sum_{k=1}^n 2^{-k} + 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+1} (1 - 2^{-n}) + 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

# 再帰的定義: Recursive definitions

- 可算集合や、可算集合上の関数、関係などを、初期値と再帰手続きで定義するもの
- 集合  $S$  の再帰的定義
  - 初期ステップ:  $S$  の要素をいくつか列挙
  - 再帰ステップ:  $S$  の要素から新しい要素を導出
  - 限定句: 上記二つのみで構成することを言明

## 例 4.1: Kleene 閉包

- アルファベット (記号の集合) $\Sigma$  から、その Kleene 閉包  $\Sigma^*$  を再帰的に定義
- $\forall a \in \Sigma$  に対して  $a \in \Sigma^*$ 。また  $\epsilon \in \Sigma^*$
- $\forall a \in \Sigma$  と  $\forall x \in \Sigma^*$  に対して、 $ax \in \Sigma^*$

## 例 4.2: 階乗

- $0! = 1$
- $n! = n \times (n - 1)!$ , for  $n \in \mathbb{N}$

## 例 4.3: 二項係数

- $n \in N$ 、 $0 \leq m \leq n$  に対して

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$