論理とブール代数

離散数学・オートマトン
2022 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. 命題論理: Propositional logic
2. 命題論理の性質: Properties of Propositional logic
3. 標準形: Normal forms
4. ブール代数と論理回路: Boolean algebra and logical circuits
5. カルノー図: Karnaugh maps

命題論理: Propositional logic

- 論理変数: T または F しか取らない変数
- 命題論理: 論理変数を論理演算で結んだもの

論理式の再帰的定義

- $a \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \Rightarrow a$ は論理式
- A は論理変数 $\Rightarrow A$ は論理式
- $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が論理式のとき、以下も論理式
  - 否定: $\neg\mathcal{A}$
  - 論理積: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  - 論理和: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
  - $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
  - $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$

論理関数: Logical/Boolean functions

- 論理変数 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ を変数とする述語:

$$\mathcal{A}\left(A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}\right) \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \tag{1.1}$$

- 付値: $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ に具体的な値を定めること
  - $\sigma\left(\mathcal{A}\right)$: ある付値 σ に対する $\mathcal{A}$ の値
- 恒等式 (tautology): $\models \mathcal{A}$

$$\forall \sigma,\ \sigma\left(\mathcal{A}\right) = \mathsf{T} \tag{1.2}$$

- $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は同値: $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) = \mathsf{T}$

命題論理の性質: Properties of Propositional logic

A、B、C は論理変数

- べき等律:

$$A \wedge A \equiv A, \;\; A \vee A \equiv A \tag{2.1}$$

- 可換律:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \;\; A \vee B \equiv B \vee A \tag{2.2}$$

- 結合律:

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \tag{2.3}$$

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \tag{2.4}$$

- 分配律:

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{2.5}$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{2.6}$$

- 吸収律:

$$(A \wedge B) \vee A \equiv A \tag{2.7}$$
$$(A \vee B) \wedge A \equiv A \tag{2.8}$$

- de Morgan:

$$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \tag{2.9}$$
$$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \tag{2.10}$$

- 二重否定:

$$\neg (\neg A) \equiv A \tag{2.11}$$

- 同値

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{2.12}$$

-

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{2.13}$$

- 対偶

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A \tag{2.14}$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \wedge B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

- 排中律:
$$A \vee \neg A \equiv \mathsf{T} \tag{2.15}$$
- 矛盾律:
$$A \wedge \neg A \equiv \mathsf{F} \tag{2.16}$$
- 三段論法:
$$\models ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{2.17}$$
-

$$\begin{aligned} A \vee \mathsf{T} &\equiv \mathsf{T} & \qquad A \wedge \mathsf{T} &\equiv \mathsf{A} \\ A \vee \mathsf{F} &\equiv A & \qquad A \wedge \mathsf{F} &\equiv \mathsf{F} \end{aligned}$$

例 2.1:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (\neg p \vee q) &= (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \\
&= \mathrm{F} \vee (p \wedge q) = (p \wedge q) \\
p \vee (\neg p \vee q) &= p \vee \neg p \vee q \\
&= \mathrm{T} \vee q = \mathrm{T}
\end{aligned}
$$

例 2.2: $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

標準形: Normal forms

- NAND: $A \uparrow B \equiv \neg(A \wedge B)$
- NOR: $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B)$
- 任意の論理式を以下の形式で表現可能
  - $\neg$ と $\wedge$ しか含まない
  - $\neg$ と $\vee$ しか含まない
  - $\neg$ と $\Rightarrow$ しか含まない
  - $\uparrow$ しか含まない
  - $\downarrow$ しか含まない

標準形: 証明

- 論理和が否定と論理積で表現可能: de Morgan

$$p \vee q \equiv \neg\left(\neg p \wedge \neg q\right)$$

- 論理積が否定と論理和で表現可能: de Morgan

$$p \wedge q \equiv \neg\left(\neg p \vee \neg q\right)$$

- 論理和、論理積を否定と $\Rightarrow$ で表現

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv \neg\left(\neg p \vee \neg q\right) \equiv \neg\left(p \Rightarrow \neg q\right) \\ p \vee q &\equiv \left(\neg\neg p\right) \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q \end{aligned}$$

標準形: 証明

- NAND だけで表現できること

$$
\begin{aligned}
\neg p &\equiv \neg (p \wedge p) \equiv p \uparrow p \\
p \vee q &\equiv \neg (\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv \neg ((p \uparrow p) \wedge (q \uparrow q)) \\
&\equiv (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \\
p \wedge q &\equiv \neg (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \\
&\equiv \neg (((p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p)) \uparrow ((q \uparrow q) \uparrow (q \uparrow q))) \\
&\equiv \neg (p \uparrow q) \\
&\equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}
$$

- 注意:

$$(p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p) \equiv p$$

Python で確認

```
def nand(p:bool, q:bool) -> bool:
    return not (p and q)

for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        #and
        x = nand(nand(p,q), nand(p,q))
        #or
        y = nand(nand(p,p), nand(q,quit))
        print(f'{p}:{q}:{x}:{y}')

for p in [True, False]:
    x = nand(nand(p,p), nand(p,p))
    print(f'{p}:{x}')
```

標準形: 証明

- NOR だけで表現できること

$$
\begin{aligned}
\neg p &\equiv \neg (p \vee p) \equiv p \downarrow p \\
p \wedge q &\equiv \neg (\neg p \vee \neg q) \\
&\equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\
p \vee q &\equiv \neg (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \\
&\equiv \neg (((p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p)) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))) \\
&\equiv \neg (p \downarrow q) \\
&\equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)
\end{aligned}
$$

- 注意:

$$
(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p) \equiv p
$$

Python で確認

```
def nor(p:bool, q:bool) -> bool:
    return not (p or q)

for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        #and
        x = nor( nor(p,p), nor(q,q))
        #or
        y = nor( nor(p,q), nor(p,q))
        print(f'{p}:{q}:{x}:{y}')

for p in [True, False]:
    x = nor( nor(p,p), nor(p,p))
    print(f'{p}:{x}')
```

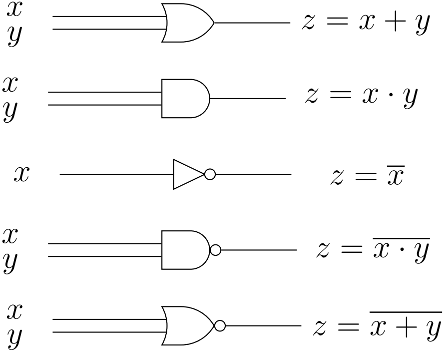
ブール代数

- 1 bit に対して $0 \to$ F、$1 \to$ T と対応付ける
- ブール変数:$\{0, 1\}$
- 演算の対応付け

論理演算	ブール演算
$p \vee q$	$p + q$
$p \wedge q$	$p \cdot q$
$\neg p$	$\bar{p}$

- 基本積: 同じ変数の一回のみ含む論理積

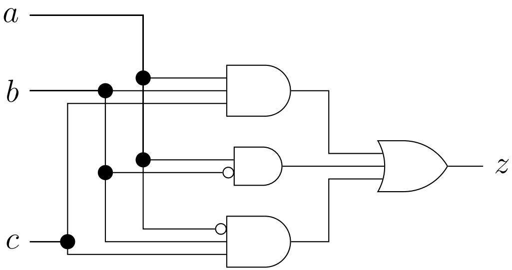
論理回路

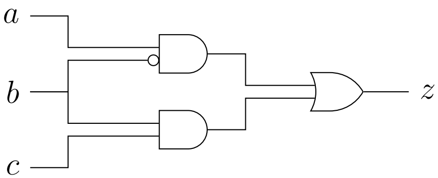


JIS C 0617-2

例 4.1: より少数の基本積へ

$$
\begin{aligned}
z &= abc + a\bar{b} + \bar{a}bc \\
&= (a + \bar{a})\, bc + a\bar{b} \\
&= a\bar{b} + bc
\end{aligned}
$$




a
b
c
z

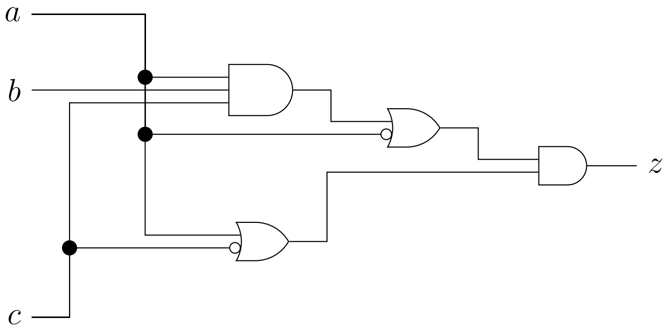
Python で確認

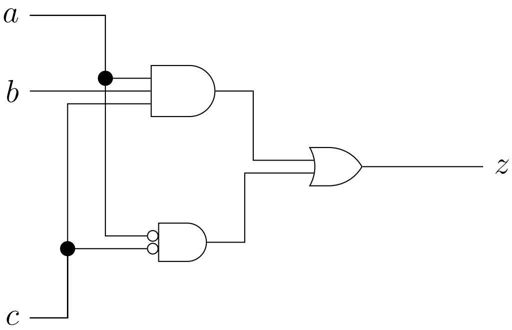
```
for a in [True, False]:
    for b in [True, False]:
        for c in [True, False]:
            z0 = (a and b and c) or (a and (not b)) or ((not a) and b
            ↪  and c)
            z1 = (a and (not b)) or (b and c)
            m = f'({a},{b},{c})->({z0},{z1})'
            print(m)
```

```
(True,True,True)->(True,True)
(True,True,False)->(False,False)
(True,False,True)->(True,True)
(True,False,False)->(True,True)
(False,True,True)->(True,True)
(False,True,False)->(False,False)
(False,False,True)->(False,False)
(False,False,False)->(False,False)
```

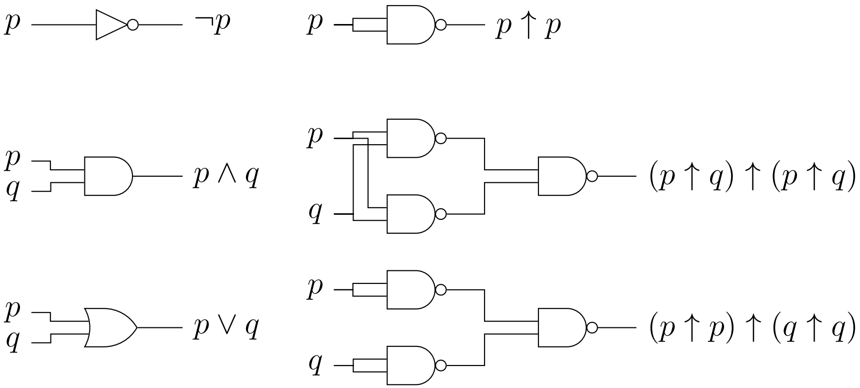
例 4.2:

$$
\begin{aligned}
z &= (abc + \bar{a})\,(a + \bar{c}) \\
&= aabc + abc\bar{c} + a\bar{a} + \bar{a}\bar{c} \\
&= abc + 0 + 0 + \bar{a}\bar{a} \\
&= abc + \bar{a}\bar{a}
\end{aligned}
$$




a
b
c
z

例 4.3: Nand 標準形


p
$\neg p$
p
$p \uparrow p$
p
q
$p \wedge q$
p
q
$(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
p
q
$p \vee q$
p
q
$(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

カルノー図: Karnaugh maps

- ブール表現を最小化する道具
- 各区画は、基本積
- 隣接する区画の基本積は一文字違い
- 隣接する区画をまとめる

2 変数カルノー図

- 基本

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

例 5.1:

横に並んだ区画をまとめると常に T

$$E = xy + x\bar{y} = x\,(y + \bar{y}) = x$$

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$		

例 5.2:

$$
\begin{aligned}
E &= xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} \\
&= xy + \bar{x}y + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} \\
&= (x + \bar{x})\, y + \bar{x}\,(y + \bar{y}) \\
&= \bar{x} + y
\end{aligned}
$$

	y	$\bar{y}$
x	xy	
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

3 変数カルノー図

- 基本

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

例 5.3:

$$z = xyz + xy\bar{z} = xy\left(z + \bar{z}\right) = xy$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$		
$\bar{x}$				