最小木

離散数学・オートマトン
2022 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. ネットワーク: Networks

2. 最小木: Minimum trees

   最適化

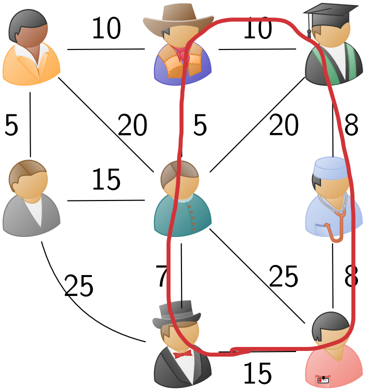
3. Jarník-Prim 法

4. Jarník-Prim 法が正しいこと

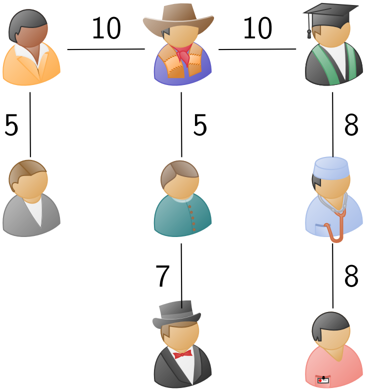
ネットワーク: Networks

- グラフの各辺に数値が対応したものをネットワークと呼ぶ
- 今日は、無向グラフの各辺に正の「重み」があるものを扱う

例 2.1: 最安の連絡経路 (全員に連絡)



例 2.1: 解



最小木の応用例

- 連絡網
- 油井のネットワーク
  - 積出港へのパイプの長さを最小に
- 組織内のネットワーク配線

Jarník-Prim 法

- 始点から開始して、連結した頂点の数を増やす
- 構成途中でも木になっている
- 構成途中の木から、未連結の頂点への辺のうちの重み最小の辺を選んで、枝を伸ばす
  - 重みの増分が最小

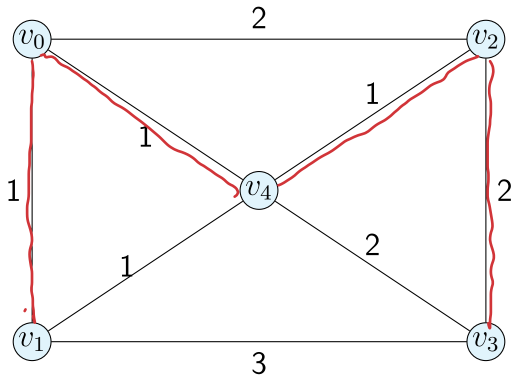
Jarník-Prim アルゴリズム

Algorithm 1 Jarník-Prim アルゴリズム

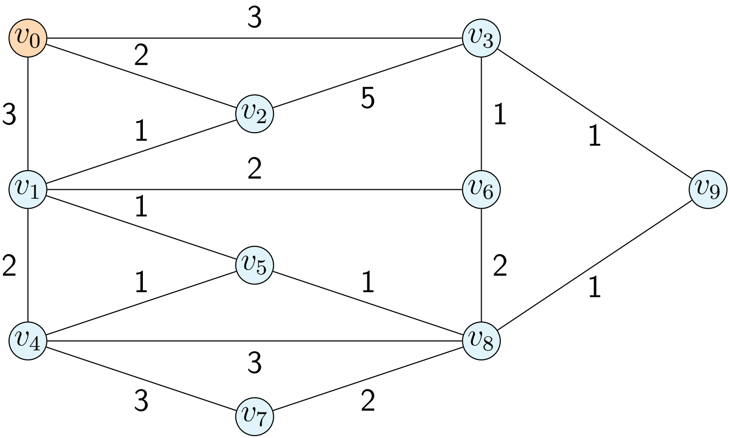
任意の頂点 $v \in V$ を選び、$U = \{v\}$、$T = \emptyset$ とする
while $U \neq V$ **do**
  U と $V \setminus U$ を結ぶ辺のうち、最小の重みのものを e とする
  e の $V \setminus U$ 側の端点を w とする
  U.append(w)
  T.append(e)
end while
T が最小木を構成する

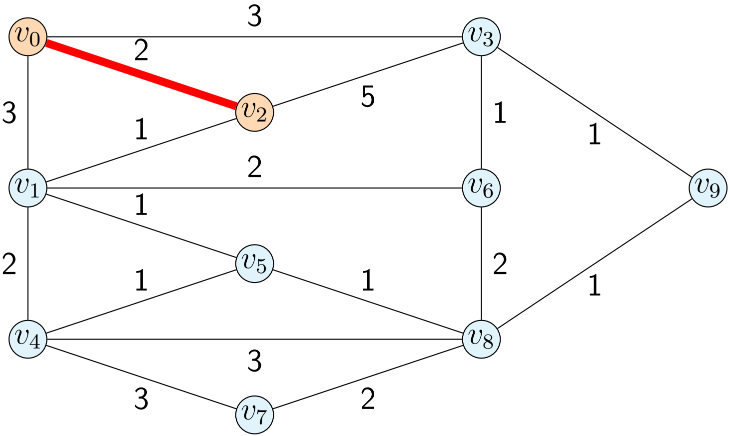
Vのうち U に含まない頂点

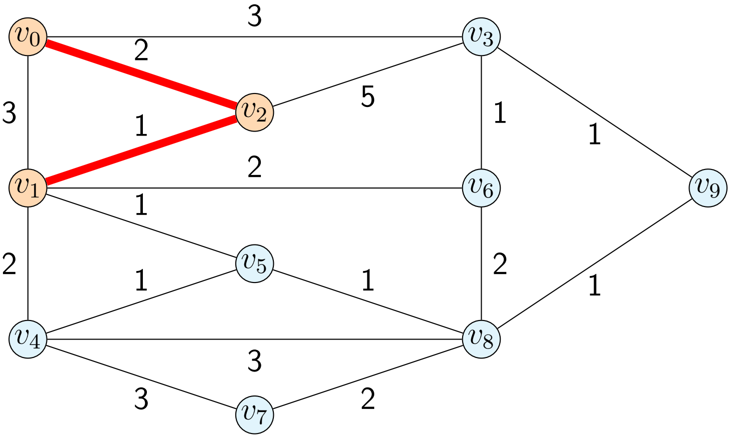
例 3.1:

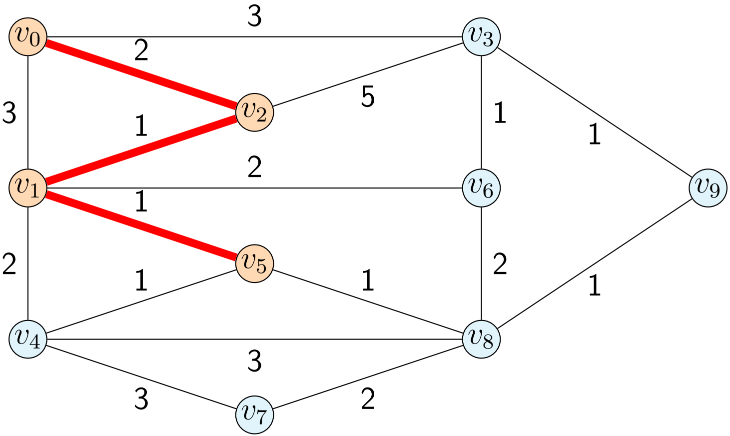


例 3.2:

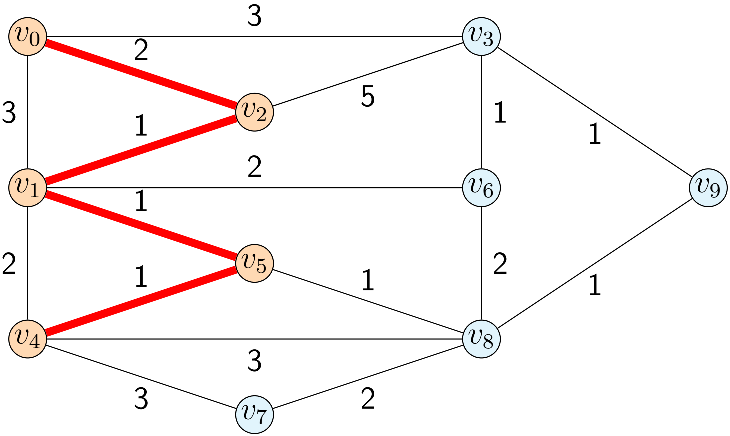


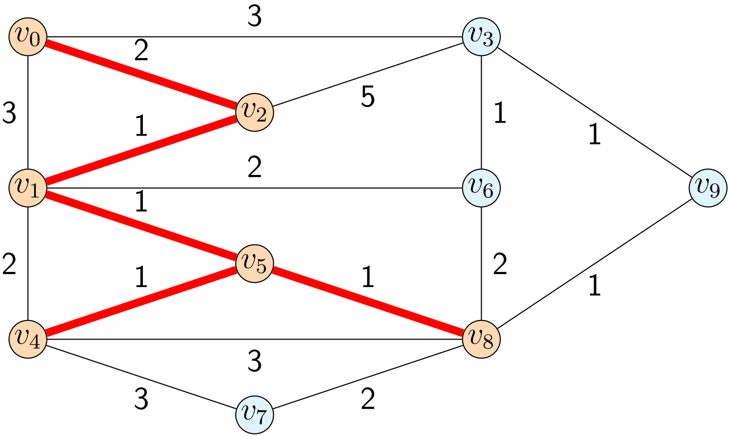

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

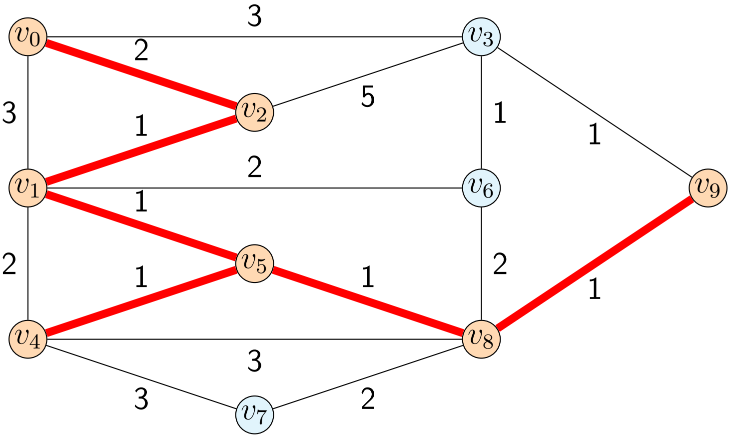

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

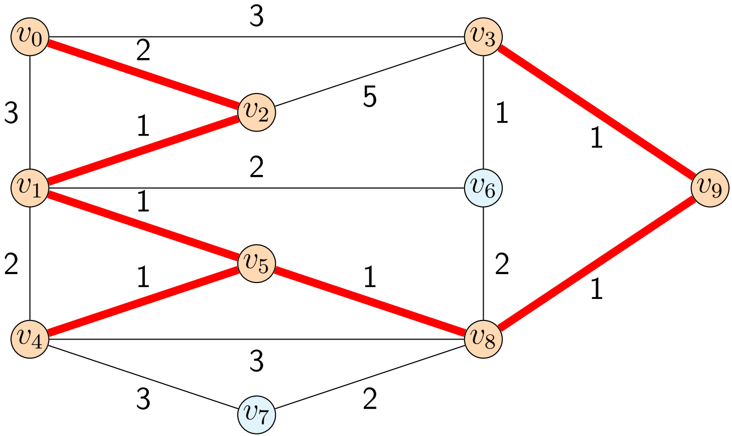


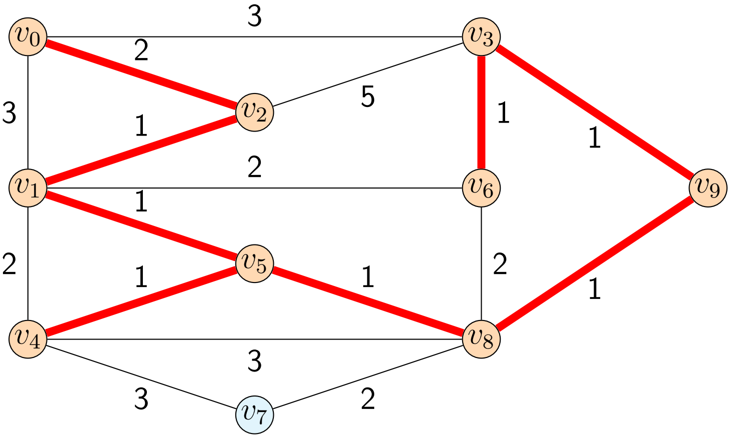
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

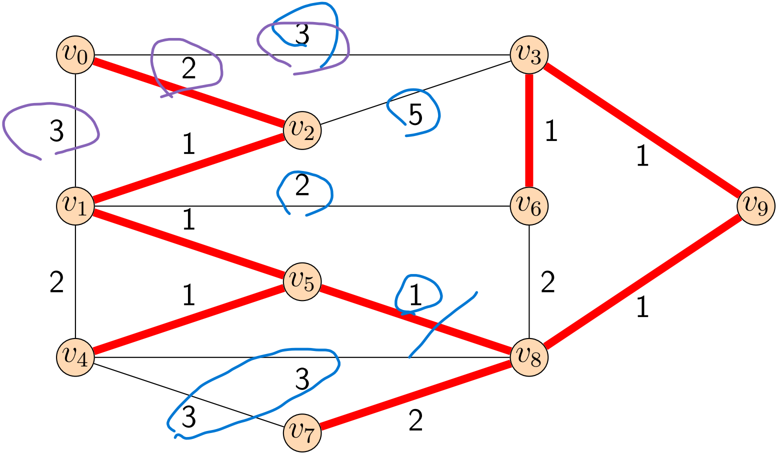

3
v_0
2
v_3
3
v_2
5
1
1
1
2
v_1
1
v_6
v_9
2
v_5
1
1
2
1
v_4
v_8
3
3
2
v_7


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2
1


v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
5
1
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

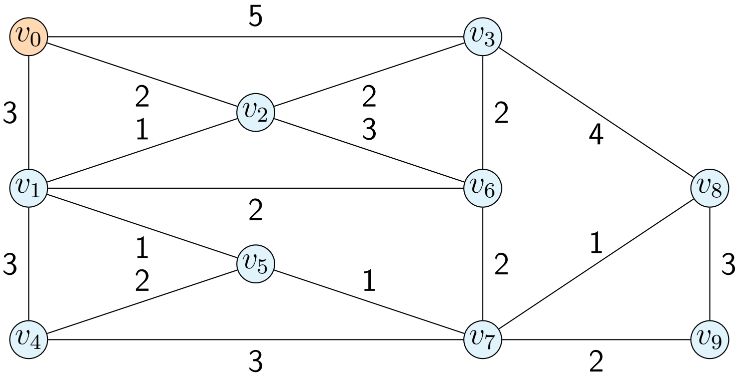

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
3
2
3
1
5
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2

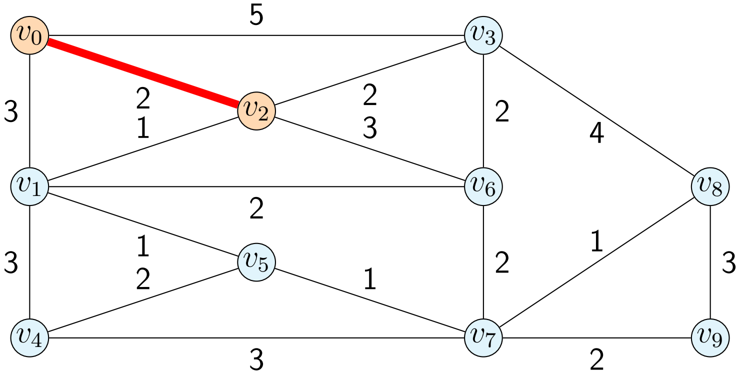

3
2
3
5
1
1
1
2
1
2
1
1
2
1
3
3
2
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9

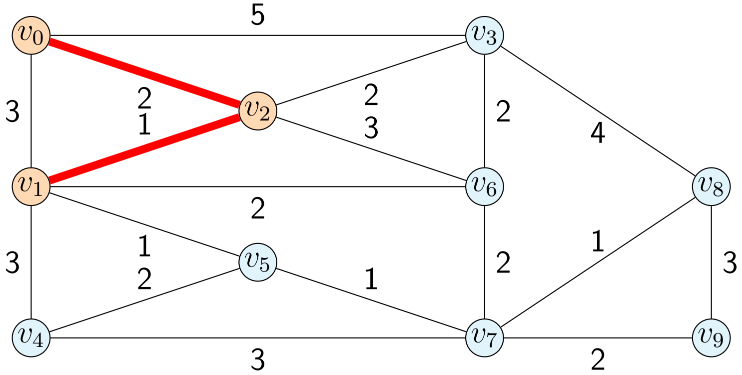


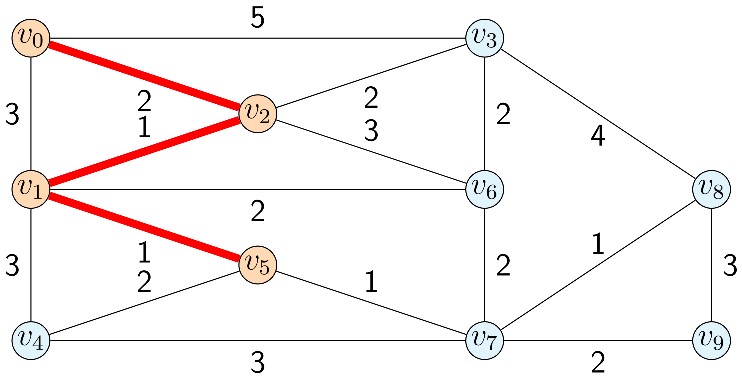
重み 1 の辺は全て使用。

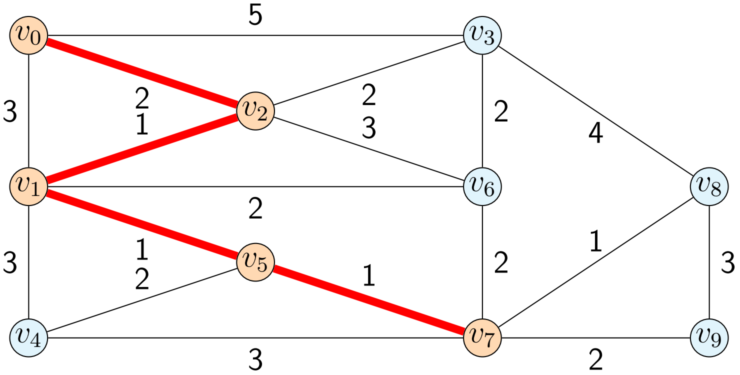
例 3.3:

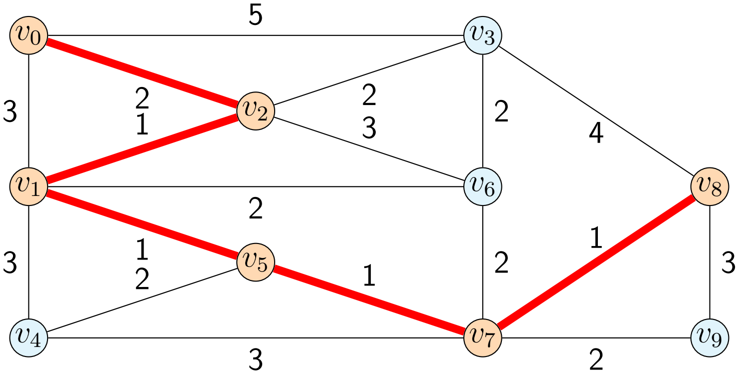



5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
1
2
1
3
3
v_5
2
1
v_4
v_7
v_9
3
2

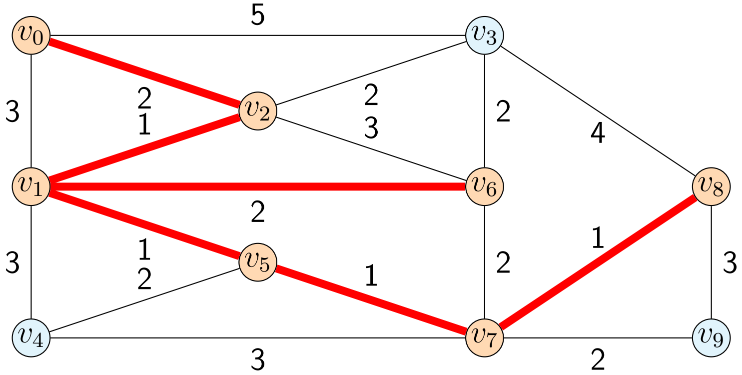

5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
1
1
v_5
2
1
3
3
2
v_4
v_7
v_9
3
2

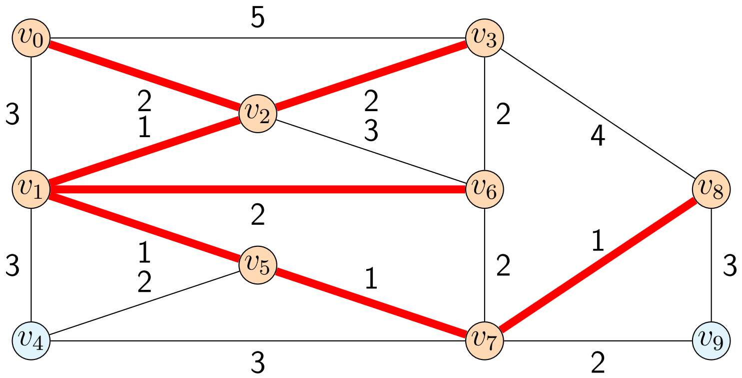

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
3
1
2
1
2
1
3
3
2

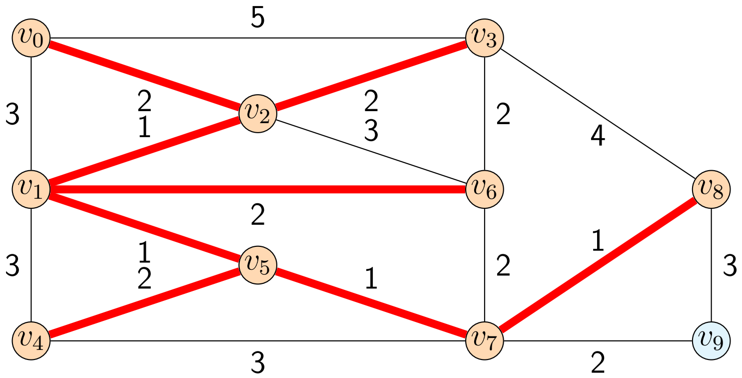

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
3
1
2
1
2
1
3
3
2

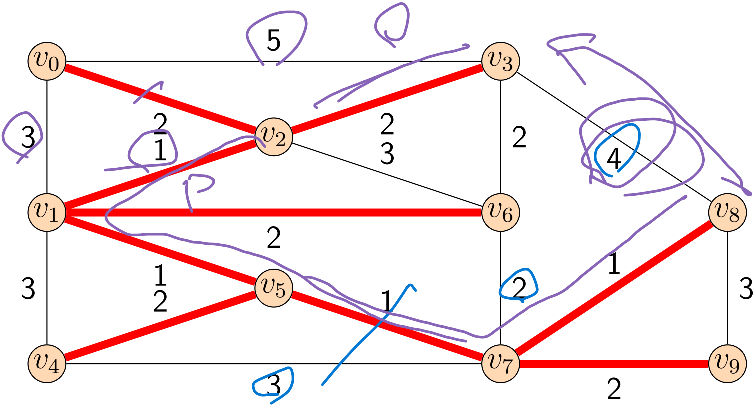


5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2


5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
1
3
1
2
v_5
1
2
3
v_4
v_7
v_9
3
2


5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2


5
v_0
v_3
3
2
1
v_2
2
3
2
4
v_1
v_6
v_8
2
3
1
2
v_5
1
2
1
3
v_4
v_7
v_9
3
2



v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
5
3
2
1
2
3
2
4
2
1
2
3
1
2
1
3
3
2

例 3.3：途中プロセス

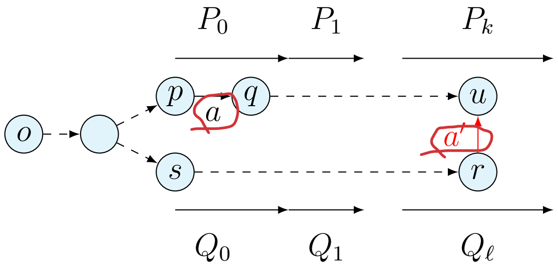
from	to	U
		$\{v_0\}$
v_0	v_2	$\{v_0, v_2\}$
v_2	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$
v_1	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_5\}$
v_5	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_5, v_7\}$
v_7	v_8	$\{v_0, v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$
v_1	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
v_2	v_3	$\{v_0, v_1, v_{2,3}, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
v_5	v_4	$\{v_0, v_1, v_{2,3}, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
v_7	v_9	$\{v_0, v_1, v_{2,3}, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

Jarník-Prim 法が正しいこと

- Jarník-Prim アルゴリズム実行中の木 T は、U が誘導する G の部分グラフ $G(U)$ における最小木になっていることを示す。
- 証明の方針:ある辺 $\exists a \in T$ を、別のある辺 $\exists a' \notin T$ に置き換えることで、より小さい木ができる

$$w(a') < w(a) \tag{4.1}$$

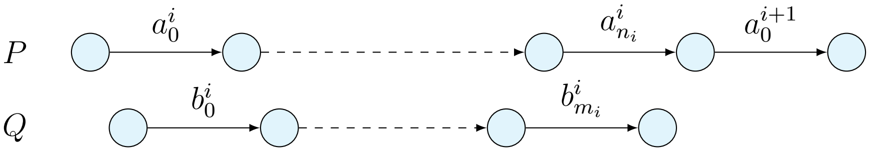
ことを仮定して、矛盾を導く。



- o を根とする木 T において、辺 $a \in T$ の代わりに辺 $a' \notin T$ としたときに、重みが小さくなると仮定する。

$$w(a') < w(a) \tag{4.2}$$

- 上の枝で、辺 a を先頭に連続して伸びた道を P_0 とし、その後に下の枝で連続して伸びた道を Q_0 とする。その後、P_1、Q_1 と交互に伸びるとする。他の道は無視する。
- 辺 a' の両端の頂点は道 P_k と Q_ℓ に属しているとする。



- P_i を構成する辺 $\{a_0^i, a_1^i, \cdots, a_{n_i}^i\}$
- Q_i を構成する辺 $\{b_0^i, b_1^i, \cdots, b_{m_i}^i\}$
- P_i の後で Q_i 伸びることから
  - P_i が伸びている最中は Q_i は伸び始めない
  - Q_i が伸びている最中は、P_i の次 P_{i+1} は伸び始めない

$P_{i+1} = \{a_0^{i+1}, a_1^{i+1}, \cdots\}$

$$\forall i, 0 \le \forall j \le n_i, \qquad w(a_j^i) \le w(b_0^i), \tag{4.3}$$

$$\forall i, 0 \le \forall j \le m_i, \qquad w(b_j^i) \le w(a_0^{i+1}) \tag{4.4}$$

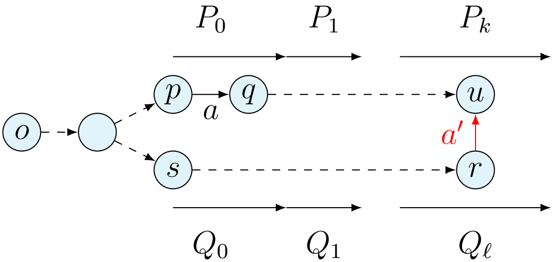
- 各道 P_i 及び Q_i の先頭の辺に注目

$$\forall i, w(a_0^i) \leq w(b_0^i) \leq w(a_0^{i+1}) \tag{4.5}$$

- 各道の先頭の辺の重みは以下を満たす

$$\forall i, w(a) \leq w(a_0^i), w(a) \leq w(b_0^i) \tag{4.6}$$

$k \leq \ell$

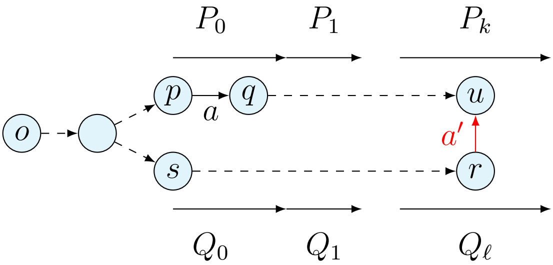


- 上の道が、頂点 u まで伸びたとき、下の道は頂点 r まで伸びていない
- 上の道 P_k が伸びるとき、つまり Q_k が始まる前に、辺 a' は採用されないことから

$$w(a) \leq w(b_0^k) \leq w(a') \tag{4.7}$$

となり、矛盾

$k > \ell$



- 上の道が、頂点 u まで伸びたとき、下の道は頂点 r を過ぎて伸びている
- 下の道 Q_ℓ が伸びるとき、つまり $P_{\ell+1}$ が始まる前に、辺 a' は採用されないことから、

$$w(a) \leq w(a_0^{\ell+1}) \leq w(a') \tag{4.8}$$

となり、矛盾