有限オートマトン

離散数学・オートマトン
2022 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

オートマトンと形式言語: Automata and Formal Languages

- オートマトン (Automaton)
  - 計算の抽象モデル
  - 入力による状態遷移
    - 「計算する」とは何かを考える
- 形式言語 (Formal Language)
  - オートマトンが受理する言語
    入力を正しく処理できるか
  - 文法を数学的に分析

生成文法

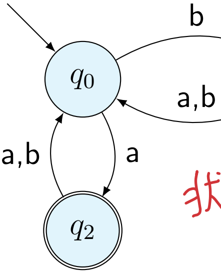
正規表現

決定性有限オートマトン
Deterministic Finite State Automata : DFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \tag{2.1}$$

- Q : 内部状態の有限集合
- Σ : 入力アルファベット、つまり入力記号の集合
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: 状態遷移関数
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態の集合

例 2.1:



状態遷移図

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$$
$$F = \{q_2\}$$

遷移関数

δ	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_0	q_0
q_2	q_0	q_0

動作イメージ

テープヘッドが移動して、テープ上の文字を読み取る。

a	b	a	b	b	a	a
q_0						

$$(q_0, \text{ababbaa}) \vdash_M (q_2, \text{babbaa})$$

$\delta(q_0, a) = q_2$

a	b	a	b	b	a	a
	q_2					

$$(q_2, \text{babbaa}) \vdash_M (q_0, \text{abbaa})$$

$\delta(q_2, a) = q_0$

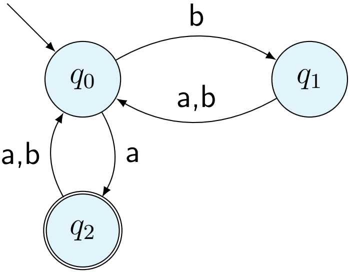
a	b	a	b	b	a	a
		q_0				

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{ababbaa}) &\vdash_M (q_2, \mathsf{babbaa}) \\
&\vdash_M (q_0, \mathsf{abbaa}) \\
&\vdash_M (q_2, \mathsf{bbaa}) \\
&\vdash_M (q_0, \mathsf{baa}) \\
&\vdash_M (q_1, \mathsf{aa}) \\
&\vdash_M (q_0, \mathsf{a}) \\
&\vdash_M (q_2, \epsilon)
\end{aligned}
$$

遷移関数

δ	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_0	q_0
q_2	q_0	q_0

例:2.1 への入力 bbaba



$$
\begin{aligned}
(q_0, bbaba) &\vdash (q_1, baba) \\
&\vdash (q_0, aba) \\
&\vdash (q_2, ba) \\
&\vdash (q_0, a) \\
&\vdash (q_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

$\vdash_M$ の推移的閉包と受理言語

- 入力 $w \in \Sigma^*$(Σ^* は Σ の要素の 0 個以上の列) によって、初期状態 q_0 から状態 q へ遷移し、テープに残っている文字列が w'

$$(q_0, w) \vdash_M^* (q, w') \tag{3.1}$$

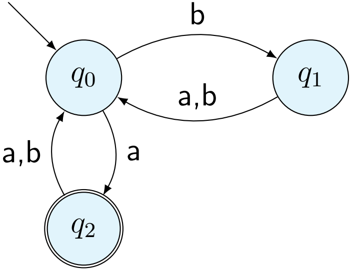
- 入力 w を受理

$$(q_0, w) \vdash_M^* (q_F, \epsilon), \quad q_F \in F \tag{3.2}$$

- 受理言語

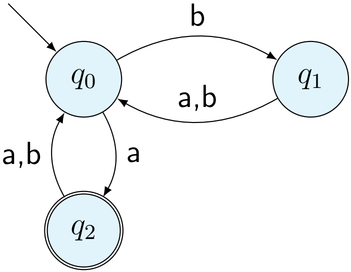
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (q_F, \epsilon), \quad q_F \in F\} \tag{3.3}$$

例:2.1 の場合



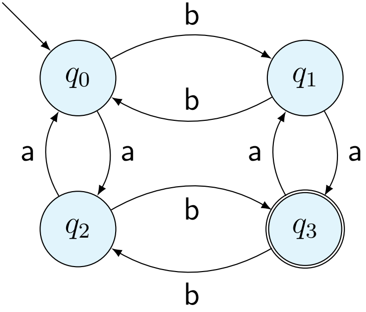
$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{aaaba}) &\vdash (q_2, \mathsf{aaba}) \vdash (q_0, \mathsf{aba}) \\
&\vdash (q_2, \mathsf{ba}) \vdash (q_0, \mathsf{a}) \vdash (q_2, \epsilon) \\
(q_0, \mathsf{babaa}) &\vdash (q_1, \mathsf{abaa}) \vdash (q_0, \mathsf{baa}) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{aa}) \vdash (q_0, \mathsf{a}) \vdash (q_2, \epsilon)
\end{aligned}
$$

受理する入力の例



`a,aaa,aba,baa,bba,`
`aaaaa,aaaba,abaaa,`
`babaa,babba,bbbaa,bbbba`

例 3.1:

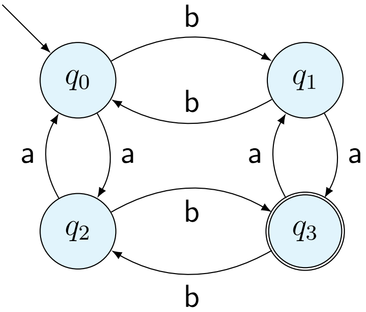


$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$$
$$F = \{q_3\}$$

遷移関数

δ	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

例 3.1: 動作例

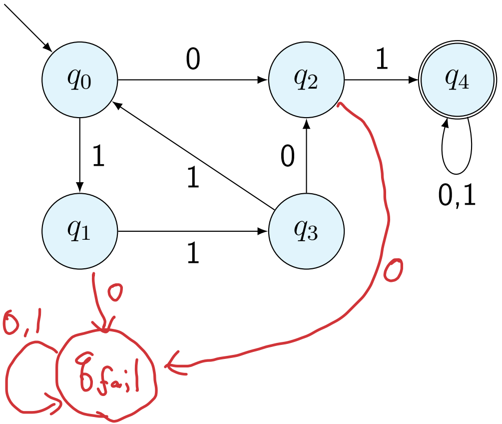


$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{aaaaab}) &\vdash (q_2, \mathsf{aaaab}) \vdash (q_0, \mathsf{aaab}) \vdash (q_2, \mathsf{aab}) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{ab}) \vdash (q_2, \mathsf{b}) \vdash (q_3, \epsilon) \\
(q_0, \mathsf{abbaba}) &\vdash (q_2, \mathsf{bbaba}) \vdash (q_3, \mathsf{baba}) \vdash (q_2, \mathsf{aba}) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{ba}) \vdash (q_1, \mathsf{a}) \vdash (q_3, \epsilon)
\end{aligned}
$$

例 3.1: 受理する文字列例 (長さ 5 まで)

a, ab, ba, aaa, abb, bab, bba, aaab, aaba, abaa, abbb, baaa, babb, bbab, bbba, aaaaa, aaabb, aabab, aabba, abaab, ababa, abbaa, abbbb, baaab, baaba, babaa, babbb, bbaaa, bbabb, bbbab, bbbba

例 3.2:



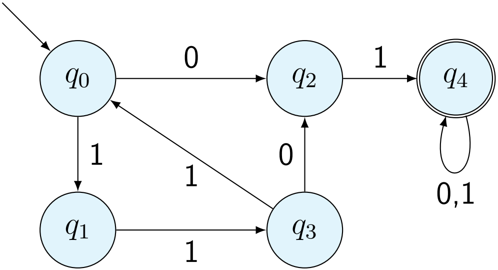
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$F = \{q_4\}$$

遷移関数

δ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1		q_3
q_2		q_4
q_3	q_2	q_0
q_4	q_4	q_4

空欄に注意

例 3.2: 動作例



$$
\begin{aligned}
(q_0, 1110101) &\vdash (q_1, 110101) \vdash (q_3, 10101) \vdash (q_0, 0101) \\
&\vdash (q_2, 101) \vdash (q_4, 01) \vdash (q_4, 1) \vdash (q_4, \epsilon) \\
(q_0, 1101010) &\vdash (q_1, 101010) \vdash (q_3, 01010) \vdash (q_2, 1010) \\
&\vdash (q_4, 010) \vdash (q_4, 10) \vdash (q_4, 0) \vdash (q_4, \epsilon)
\end{aligned}
$$

例 3.2: 受理する文字列例 (長さ 5 まで)

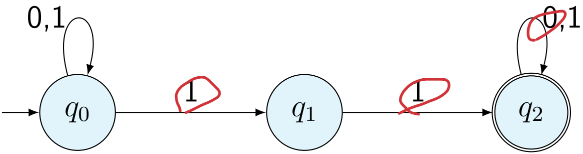
01, 010, 011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1101, 01000, 01001, 01010, 01011, 01100, 01101, 01110, 01111, 11010, 11011, 11101

非決定性有限オートマトン Non-deterministic Finite State Automata : NFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \tag{4.1}$$

- Q : 内部状態の集合
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$: 状態遷移関数。
  2^Q は、Q のべき集合、つまり Q の部分集合の族。遷移先が複数であることに注意。
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

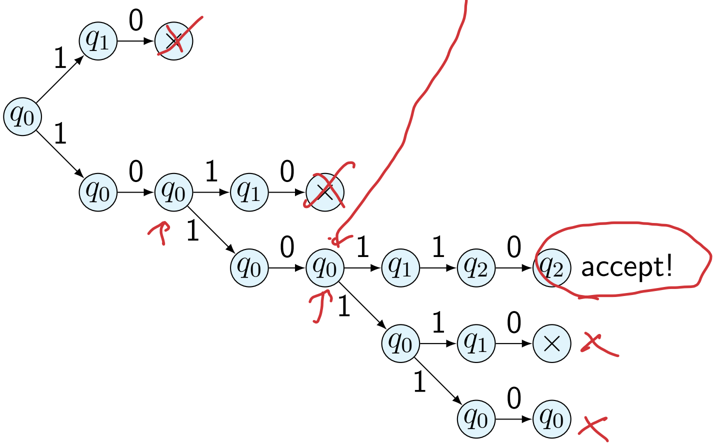
例 4.1:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad F = \{q_2\}$$

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

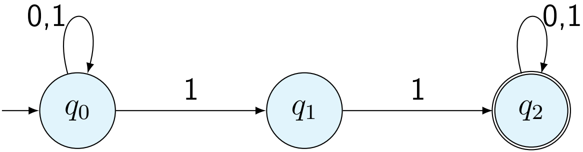
動作例: 入力 1010110



入力が引き起こす状態遷移のうちで、受理状態に至る場合があれば、その入力を受理する。

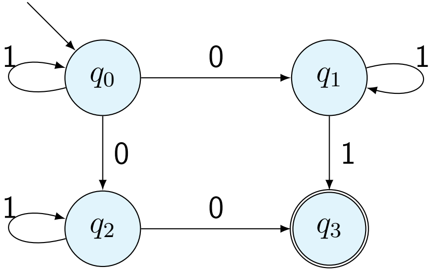
長さ 5 以下の受理入力

0110



11, 011, 110, 111, 0011, 0110, 0111, 1011, 1100, 1110, 1111, 00011, 00110, 00111, 01011, 01100, 01110, 01111, 10011, 10110, 10111, 11000, 11011, 11100, 11110, 11111

例 4.2:



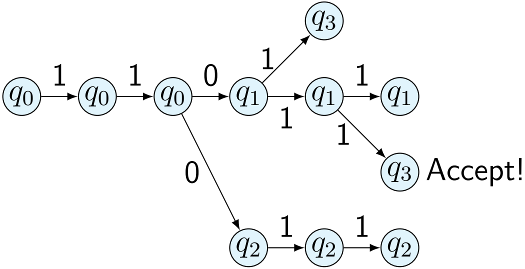
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_2\}\,, \quad \Sigma = \{0, 1\}\,, \quad F = \{q_3\}$$

δ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$

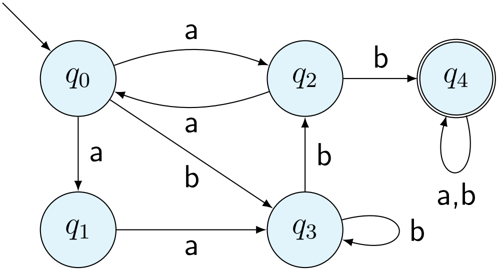
長さ 5 以下の受理入力

00, 01, 010, 011, 100, 101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1100, 1101, 01110, 01111, 10110, 10111, 11010, 11011, 11100, 11101

動作例:入力 11011



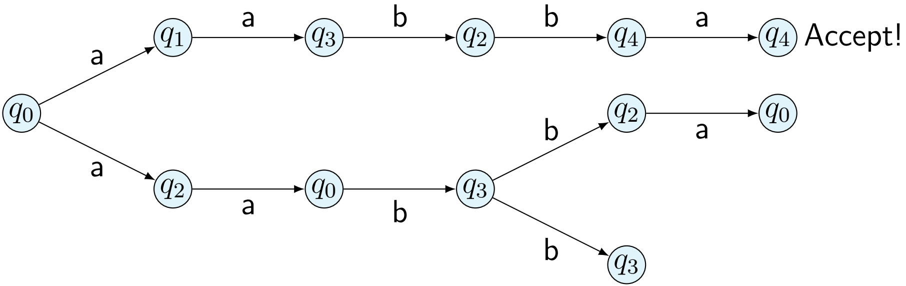
例 4.3:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, F = \{q_4\}$$

δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

動作例:入力 aabba



疑問

- オートマトンが受理する文字列の集合を記述する方法
  - 文字列パターンを記述する方法 ⟷ 文法
- NFA と DFA は本質的に異なるのか
  - 受理する文字列集合は異なるのか