

「離散数学・オートマトン」演習問題 02 (解答例)

2022/10/17

1 命題

課題 1 以下の演算に対する真理値表を作成しなさい。

1. $\neg p \vee \neg q$
2. $\neg(\neg p \vee q)$
3. $\neg(p \wedge \neg q)$

解答例

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(p \wedge \neg q)$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	F
T	T	F	F	T

参考までに、Python での実行例を示す。

```
1 pd = [False, True]
2 qd = [False, True]
3 for p in pd:
4     for q in qd:
5         x = (not p) or (not q)
6         y = not ( (not p) or q)
7         z = not ( p and (not q))
8         m = f'{p}::{q}::{x}::{y}::{z}'
9         print(m)
```

```
False:False:True:False:True
False:True:True:False:True
True:False:True:True:False
True:True:False:False:True
```

このコードは、以下の Github から取得できます。

<https://github.com/discrete-math-saga/PropositionsAndPredicates/>

課題 2 $\sqrt{3}$ が無理数であることを、背理法を用いて証明せよ。

解答例 $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定し、 $\sqrt{3} = q/p$ とおく。ここで p と q は、互いに素である自然数である。両辺を二乗して以下を得る。

$$3p^2 = q^2$$

左辺は 3 の倍数であることから、 q は 3 の倍数である。右辺は q^2 であるから、9 の倍数であり、つまり、 p も 3 の倍数である。これは、 p と q が互いに素という仮定に反する。

このことから、 $\sqrt{3}$ が有理数であるという仮定が誤りである。つまり、 $\sqrt{3}$ は無理数である。

2 述語

課題 3 N^3 上の述語 $P(x, y, z) : x = yz$ は、 x が $y \times z$ であるとき真である。このとき $Q(x, y) : \exists z P(x, y, z)$ が真となるのは、どのような (x, y) に対してか、答えなさい。

解答例 $Q(x, y)$ が真となるのは、「 x は y で割り切れる」場合である。