# 「離散数学・オートマトン」演習問題 11 （解答例)

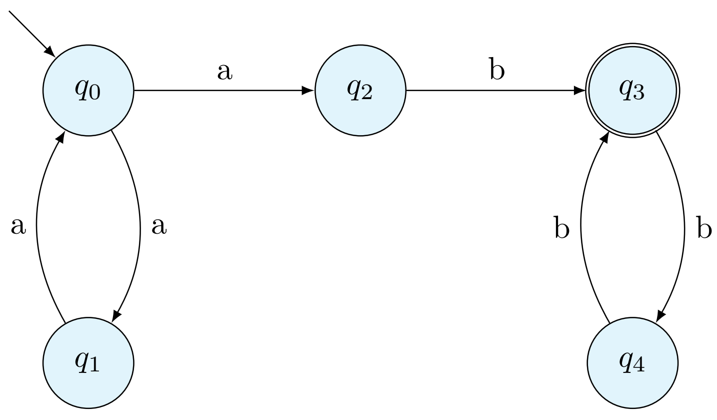
2022/12/19

## 1　非決定性有限オートマトンから決定性有限オートマトンへ

**課題 1**　非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。ここで

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\
\Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \\
F &= \{q_3\}
\end{aligned}
$$

である。遷移関数は図に示す。このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。




**解答例**　対応する決定性有限オートマトン $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$ を構成するために、$Q'$ と $\delta'$ をアルゴリズムに従って構成する。

- $[q_0]$ を起点とする遷移

$$\delta'([q_0], \mathrm{a}) = [q_1, q_2]$$

- $[q_1, q_2]$ を起点とする遷移

$$\delta'([q_1, q_2], \mathrm{a}) = [q_0, q_2]$$
$$\delta'([q_1, q_2], \mathrm{b}) = [q_3]$$

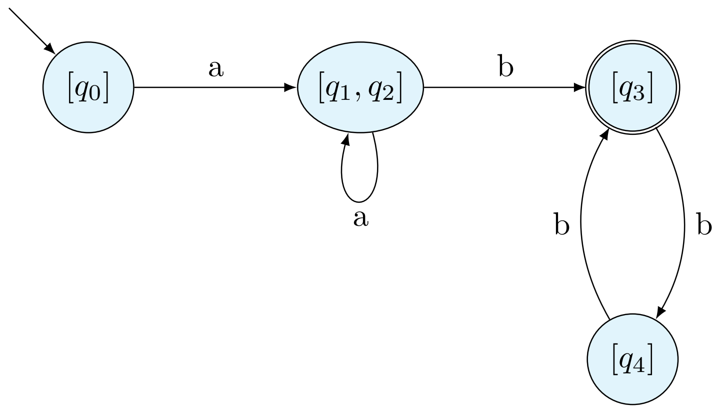
- $[q_3]$ を起点とする遷移

$$\delta'([q_3], \mathrm{b}) = [q_4]$$

- $[q_4]$ を起点とする遷移

$$\delta'([q_4], \mathrm{b}) = [q_3]$$

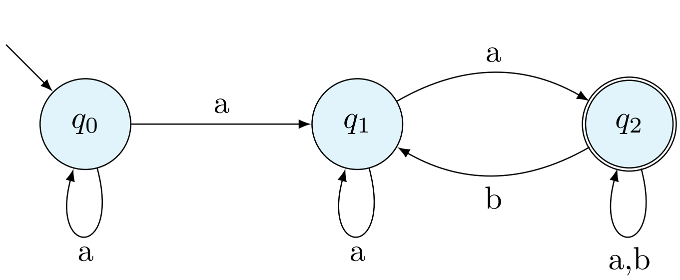
$M$ の受理状態は $F' = \{[q_3]\}$ となる。状態遷移を図示する。




**課題 2**　非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。ここで

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$
$$F = \{q_2\}$$

である。遷移関数は図に示す。このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。



**解答例**　対応する決定性有限オートマトン $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle$ を構成するために、$Q'$ と $\delta'$ をアルゴリズムに従って構成する。

- $[q_0]$ を起点とする遷移

$$\delta'\left([q_0], \mathrm{a}\right) = [q_0, q_1]$$

- $[q_0, q_1]$ を起点とする遷移

$$\delta'\left([q_0, q_1], \mathrm{a}\right) = [q_0, q_1, q_2]$$

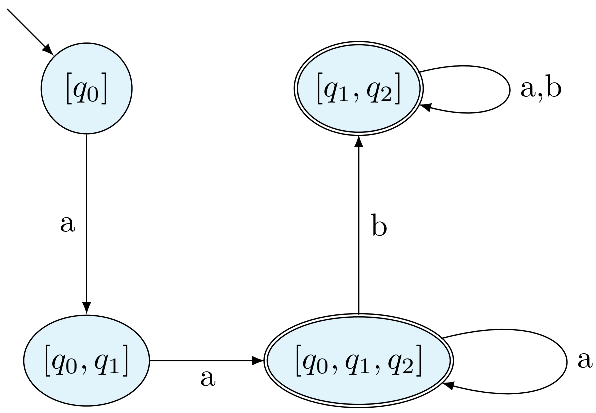
- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点とする遷移

$$\delta'\left([q_0, q_1, q_2], \mathrm{a}\right) = [q_0, q_1, q_2]$$
$$\delta'\left([q_0, q_1, q_2], \mathrm{b}\right) = [q_1, q_2]$$

- $[q_1, q_2]$ を起点とする遷移

$$\delta'\left([q_1, q_2], \mathrm{a}\right) = [q_1, q_2]$$
$$\delta'\left([q_1, q_2], \mathrm{b}\right) = [q_1, q_2]$$

$M$ の受理状態は $F' = \{[q_0, q_1, q_2], [q_1, q_2]\}$ となる。状態遷移を図示する。

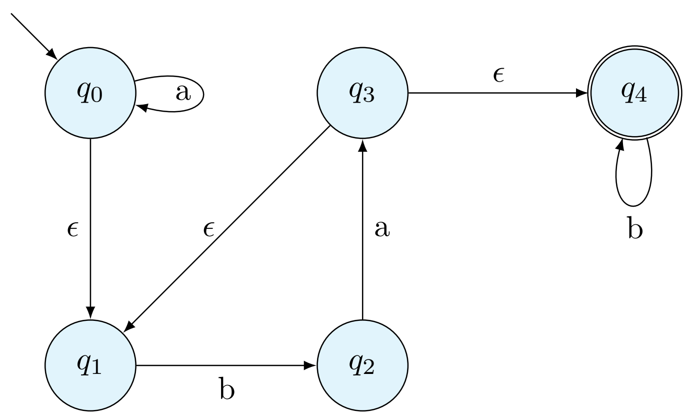


## 2 $\epsilon$ 動作のある非決定性有限オートマトンから決定性有限オートマトンへ

**課題 3** $\epsilon$ 動作のある非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ を考える。ここで

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\
\Sigma &= \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \\
F &= \{q_4\}
\end{aligned}
$$

である。遷移関数は図に示す。このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。




**解答例** 対応する決定性有限オートマトン $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ を構成するために、$Q'$ と $\delta'$ をアルゴリズムに従って構成する。

今回は $\epsilon$-動作があるために、初期状態の構築か始める。

- $q_0$ を起点とする $\epsilon$-閉包を初期状態とする。

$$q'_0 = [q_0, q_1]$$

- $[q_0, q_1]$ を起点とする遷移

$$
\begin{aligned}
&\delta'\left([q_0, q_1], \mathrm{a}\right) = \delta\left(q_0, \mathrm{a}\right) \cup \delta\left(q_1, \mathrm{a}\right) = [q_0, q_1] \\
&\delta'\left([q_0, q_1], \mathrm{b}\right) = [q_2]
\end{aligned}
$$

- $[q_2]$ を起点とする遷移。$q_3$ から $\epsilon$-遷移があることに留意。

$$\delta'\left([q_2], \mathrm{a}\right) \epsilon\text{-CL}\left(q_3\right) = [q_1, q_3, q_4]$$

- $[q_1, q_3, q_4]$ を起点とする遷移

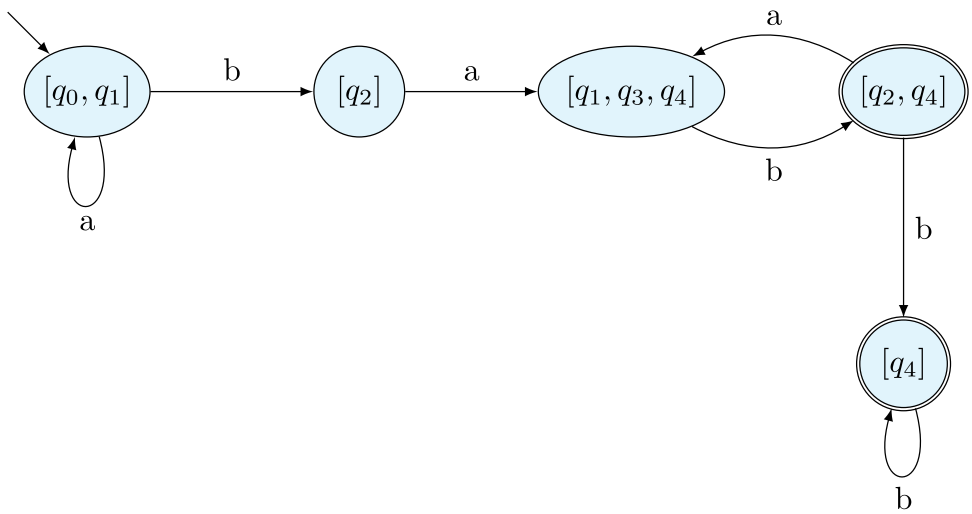
$$\delta'([q_1, q_3, q_4], \mathrm{b}) = [q_2, q_4]$$

- $[q_2, q_4]$ を起点とする遷移

$$\delta'([q_2, q_4], \mathrm{a}) = [q_1, q_3, q_4]$$
$$\delta'([q_2, q_4], \mathrm{b}) = [q_4]$$

- $[q_4]$ を起点とする遷移

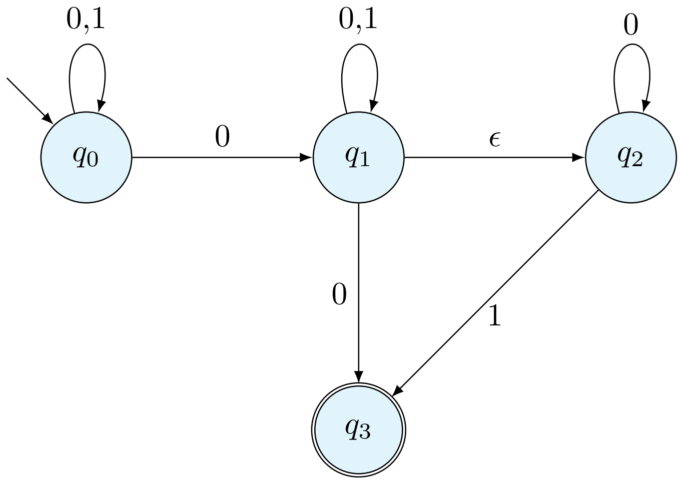
$$\delta'([q_4], \mathrm{b}) = [q_4]$$




**課題 4**　$\epsilon$ 動作のある非決定性有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ を考える。ここで

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$
$$F = \{q_3\}$$

である。遷移関数は図に示す。このとき、同じ文字列を受理する決定性有限オートマトンを構成しなさい。




**解答例**

- $[q_0]$ から

$$\delta([q_0],0) = \{q_0,q_1\} \cup \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_0,q_1\} \cup \{q_1,q_2\} = [q_0,q_1,q_2]$$
$$\delta([q_0],1) = [q_0]$$

- $[q_0,q_1,q_2]$ から

$$\delta([q_0,q_1,q_2],0) = \delta([q_0],0) \cup \delta(q_1,0) \cup \delta(q_2,0) = [q_0,q_1,q_2] \cup \{q_3\} = [q_0,q_1,q_2,q_3]$$
$$\delta([q_0,q_1,q_2],1) = \delta([q_0],1) \cup \epsilon\text{-CL}(q_1) \cup \delta(q_2,1) = \{q_0\} \cup \{q_1,q_2\} \cup \{q_3\} = [q_0,q_1,q_2,q_3]$$

- $[q_0,q_1,q_2,q_3]$ から

$$\delta([q_0,q_1,q_2,q_3],0) = \delta([q_0,q_1,q_2],0) = [q_0,q_1,q_2,q_3]$$
$$\delta([q_0,q_1,q_2,q_3],1) = \delta([q_0,q_1,q_2],1) = [q_0,q_1,q_2,q_3]$$