

学籍番号										氏名
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

「離散数学・オートマトン」確認テスト

2022/10/24

問 1 $n \in \mathbb{N}$ に対する以下の公式を数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1) \quad (1)$$

解答例

1. $n = 1$ の場合、左辺は $\sum_{k=1}^1 (2k-1)^2 = 1^2 = 1$ 、右辺は

$$\frac{1}{3}1(4-1) = 1$$

となり、式 (1) が成り立つ。

2. ある n で式 (1) が成り立つと仮定し、 $n+1$ についても成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + (2n+2-1)^2 \\ &= \frac{1}{3}n(4n^2-1) + (2n+1)^2 \\ &= \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1) + (2n+1)^2 \\ &= \frac{1}{3}[n(2n+1) + 3(2n+1)](2n+1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(2n+3)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)-1) \end{aligned}$$

これは、式 (1) の $n+1$ の場合である。

問 2 以下の関数または述語を再帰的に定義しなさい。

1. $S(n) = \sum_{k=0}^n k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $F(n) = \prod_{k=1}^n k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $P(n) : \exists m \in \mathbb{N}, n = 3 \times m$ (n が 3 の倍数の時、述語 $P(n)$ は真となる)

解答例

1. $S(1) = 1$ 、 $S(n) = S(n-1) + n$ for $n > 1$
2. $F(1) = 1$ 、 $F(n) = n \times F(n-1)$ for $n > 1$
3. $P(1) = \text{F}$, $P(2) = \text{F}$, $P(3) = \text{T}$ 、 $P(n) = P(n-3)$ for $n > 3$