

|      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |    |
|------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|----|
| 学籍番号 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 氏名 |
|------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|----|

学籍番号と氏名は丁寧に記載すること

## 「離散数学・オートマトン」確認テスト

2022/10/31

問1 集合  $A = \{a, b, c, d\}$  上の関係

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, d), (c, d)\} \quad (1)$$

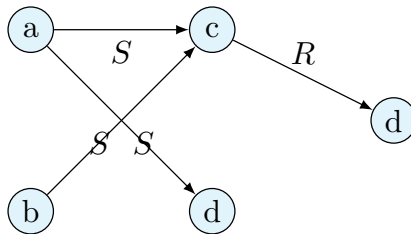
$$S = \{(a, c), (a, d), (b, c)\} \quad (2)$$

に対して、 $R \circ S$ 、 $R^2$ 、 $S^2$  を求めよ。

解答例

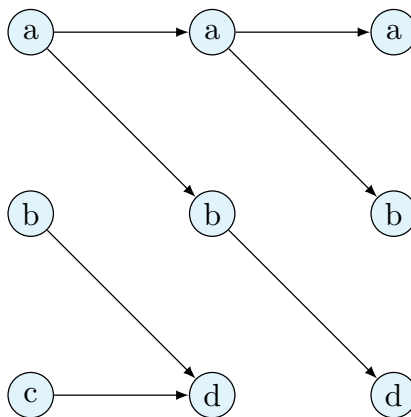
- $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$  であることから

$$R \circ S = \{(a, d), (b, d)\}$$



- $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$  であることから

$$R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$$



- $S^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zSy\}$  であることから

$$S^2 = \emptyset$$

**問 2**  $N$  上の関係  $R$  を  $nRm = \{(n, m) \mid m \bmod n = 0\}$ 、つまり  $n$  は  $m$  を割り切る、で定義する。このとき、 $R$  は、 $N$  上の半順序であって、全順序でないことを示しなさい。

**解答例** はじめに、反射律、推移律、反対称律を示すことで半順序であることを示す。

- 反射律： $\forall n \in N$  に対して  $nRn$  は明らか
- 推移律： $nRm$  かつ  $mRl$  とは、 $m$  が  $n$  の倍数であり、かつ  $l$  が  $m$  の倍数であることである。従って、 $l$  は  $n$  の倍数となり、 $nRl$  が成り立つ。
- 反対称律： $nRm$  かつ  $mRn$  とは、 $m$  が  $n$  の倍数であり、かつ  $n$  が  $m$  の倍数であることである。つまり、 $n = m$  である。

以上から、半順序であることが分かった。

$N$  の任意の要素の組  $(x, y)$  に対して関係  $R$  を考えると、関係が成立しない組を例示することができる。例えば、 $(3, 5)$  と  $(5, 3)$  のいずれにも関係  $R$  は成立しない。つまり、関係  $R$  は全順序ではない。