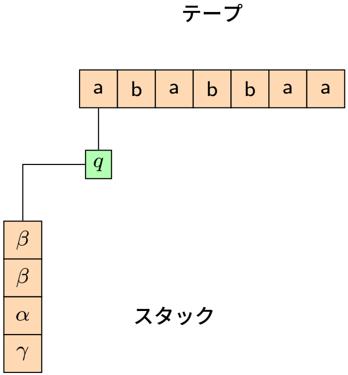
プッシュダウンオートマトン

離散数学・オートマトン
2023 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

1. プッシュダウンオートマトン: Pushdown automata
2. 決定性プッシュダウンオートマトン: Deterministic PDA
3. PDA と受理言語: PDA and Their Accepted Languages
4. 非決定性プッシュダウンオートマトン: Nondeterministic PDA

プッシュダウンオートマトン: 動作イメージ

- テープとともに、スタックの文字を読む
- 状態遷移するとともに、スタックへ文字列を書き込む
- スタックという特殊な無限に大きなメモリを持つ機械



スタック: stacks

- リストのような 1 次元のデータ列
- 先頭に書く (push) ことと、先頭から読む (pop) ことだけが許される
  - 先頭以外のデータは触れない
  - FILO (First-In Last-Out)
  - pop: 先頭を取り出して読む、つまり、先頭の要素はスタックから無くなることに注意
- Python での実装例: 次シート
  - `deque` を利用
  - `append()`: 最後に要素を追加
  - `pop()`: 最後の要素を取り出し、削除

Stack クラス定義

```
from collections import deque
class Stack:
    def __init__(self):#コンストラクタ
        self.elements = deque()
    def is_empty(self):#要素が無いとき True
        return len(self.elements) == 0
    def push(self,e):#要素を追加
        self.elements.append(e)
    def pop(self):#要素を取り出す。要素は削除される
        return self.elements.pop()
    def peek(self):#先頭の要素を調べる
        return self.elements[-1]
    def size(self):#要素数を返す
        return len(self.elements)
```

Stack クラス定義: 続き

```
def __str__(self):#文字列化
    s = '['
    for x in self.elements:
        s += str(x)+','
    n = len(s)
    s = s[0:n-1]
    s += ']'
    return s
```

Stack クラス利用例

```
myStack = Stack()
myStack.push('a')
myStack.push('b')
myStack.push('b')
print(myStack)

myStack.pop()
myStack.pop()
print(myStack)
```

https://github.com/discrete-math-saga/PDA

決定性プッシュダウンオートマトン Deterministic Pushdown Automata

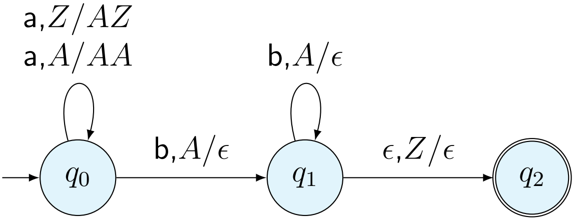
$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle \tag{2.1}$$

- Q: 内部状態の集合
- Σ: テープのアルファベット
- Γ: スタックのアルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$: 遷移関数
  - 注意: スタックから 1 文字読み、文字列を書き込む
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $Z_0 \in \Gamma$: スタックの底の記号
- $F \subseteq Q$: 終状態の集合

例 2.1:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}\,, \qquad F = \{q_2\}\,,$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}\,, \qquad \Gamma = \{A, Z\}\,.$$

$$\delta(q_0, \mathsf{a}, Z) = (q_0, AZ)\,, \quad \delta(q_0, \mathsf{a}, A) = (q_0, A)\,, \quad \delta(q_0, \mathsf{b}, A) = (q_0, \epsilon)\,,$$
$$\delta(q_1, \mathsf{b}, A) = (q_1, \epsilon)\,, \qquad \delta(q_1, \epsilon, Z) = (q_2, \epsilon)\,.$$

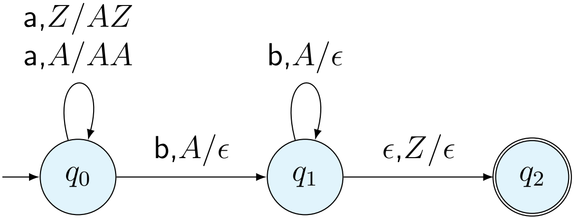


注意:$\delta(q_1, \epsilon, Z)$ は決定的動作であることに注意。スタック文字が Z のときのみ。

動作: (Q, Σ^*, Γ^*) の変化

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{aaabbb}, Z) &\vdash (q_0, \mathsf{aabbb}, AZ) && \text{a を読んでいる間は } q_0 \text{に止まる}\\
&\vdash (q_0, \mathsf{abbb}, AAZ)\\
&\vdash (q_0, \mathsf{bbb}, AAAZ) && \text{b を読むと } q_1 \text{へ遷移}\\
&\vdash (q_1, \mathsf{bb}, AAZ)\\
&\vdash (q_1, \mathsf{b}, AZ)\\
&\vdash (q_1, \epsilon, Z) && \text{空スタックで } q_2 \text{へ遷移}\\
&\vdash (q_2, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

aabb に対する動作



動作失敗: a と b の数が異なる

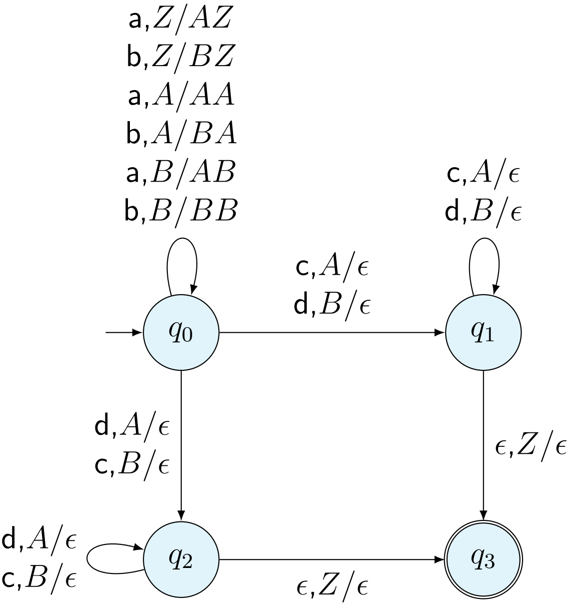
$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{aaabb}, X) &\vdash (q_0, \mathsf{aabb}, AZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{abb}, AAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{bb}, AAAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{b}, AAZ) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, AZ)
\end{aligned}
$$

例 2.2:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \qquad F = \{q_3\},$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}, \qquad \Gamma = \{A, B, Z\}.$$

$$\delta(q_0, \mathsf{a}, Z) = (q_0, AZ), \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, Z) = (q_0, BZ),$$
$$\delta(q_0, \mathsf{a}, A) = (q_0, AA), \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, A) = (q_0, BA),$$
$$\delta(q_0, \mathsf{a}, B) = (q_0, AB), \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, B) = (q_0, BB),$$
$$\delta(q_0, \mathsf{c}, A) = (q_1, \epsilon), \qquad \delta(q_0, \mathsf{d}, B) = (q_1, \epsilon),$$
$$\delta(q_0, \mathsf{d}, A) = (q_2, \epsilon), \qquad \delta(q_0, \mathsf{c}, B) = (q_2, \epsilon),$$
$$\delta(q_1, \mathsf{c}, A) = (q_1, \epsilon), \qquad \delta(q_1, \mathsf{d}, B) = (q_1, \epsilon),$$
$$\delta(q_2, \mathsf{d}, A) = (q_2, \epsilon), \qquad \delta(q_2, \mathsf{c}, B) = (q_2, \epsilon),$$
$$\delta(q_1, \epsilon, Z) = (q_3, \epsilon), \qquad \delta(q_2, \epsilon, Z) = (q_3, \epsilon)$$

注意:$\delta(q_1, \epsilon, Z)$ は決定的動作であることに注意。スタック文字が Z のときのみ。


a,Z/AZ
b,Z/BZ
a,A/AA
b,A/BA
a,B/AB
b,B/BB
c,A/ϵ
d,B/ϵ
c,A/ϵ
d,B/ϵ
q_0
q_1
d,A/ϵ
c,B/ϵ
ϵ,Z/ϵ
d,A/ϵ
c,B/ϵ
q_2
q_3
ϵ,Z/ϵ

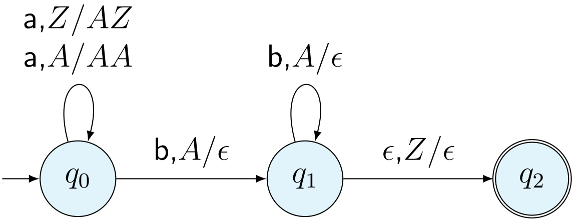
動作例:abaaccdc

$$
\begin{aligned}
(q_0, \text{abaaddcd}, Z) &\vdash (q_0, \text{baaddcd}, AZ)\\
&\vdash (q_0, \text{aaddcd}, BAZ)\\
&\vdash (q_0, \text{addcd}, ABAZ)\\
&\vdash (q_0, \text{ddcd}, AABAZ)\\
&\vdash (q_2, \text{dcd}, ABAZ)\\
&\vdash (q_2, \text{cd}, BAZ)\\
&\vdash (q_2, \text{d}, AZ)\\
&\vdash (q_2, \epsilon, Z)\\
&\vdash (q_3, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

動作例:ababdcdc

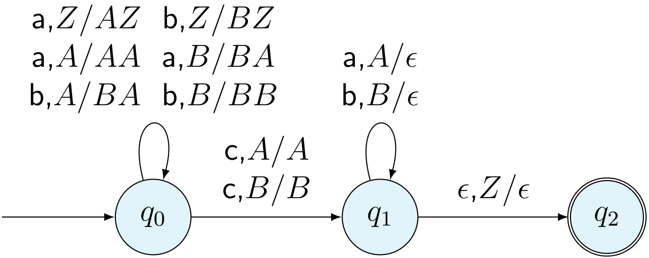
$$
\begin{aligned}
(q_0, \text{ababdcdc}, Z) &\vdash (q_0, \text{babdcdc}, AZ) \\
&\vdash (q_0, \text{abdcdc}, BAZ) \\
&\vdash (q_0, \text{bdcdc}, ABAZ) \\
&\vdash (q_0, \text{dcdc}, BABAZ) \\
&\vdash (q_1, \text{cdc}, ABAZ) \\
&\vdash (q_1, \text{dc}, BAZ) \\
&\vdash (q_1, \text{c}, AZ) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, Z) \\
&\vdash (q_3, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

受理言語



- 入力とスタックが空になった時に、終状態に居るか？
- 例 2.1 では、$\{a^i b^i | i \in N\}$ を受理
  - a の数をスタック文字 A で記録
  - テープ上の b とスタック上の A を照合
  - FA では受理できない言語: 任意の数の a の「数」を記録
- 例 2.2 の受理言語は?
- 次の例 3.1 では、$\{w\mathrm{c}w^R | w \in (\mathrm{a}+\mathrm{b})^*\}$ を受理

例 3.1:


a,Z/AZ b,Z/BZ
a,A/AA a,B/BA
b,A/BA b,B/BB
a,A/ϵ
b,B/ϵ
c,A/A
c,B/B
ϵ,Z/ϵ
q_0
q_1
q_2

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \qquad F = \{q_2\},$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \qquad \Gamma = \{A, B, Z\}.$$

$$\delta(q_0, \mathsf{a}, Z) = (q_0, AZ), \quad \delta(q_0, \mathsf{a}, A) = (q_0, AA), \quad \delta(q_0, \mathsf{a}, B) = (q_0, AB),$$
$$\delta(q_0, \mathsf{b}, Z) = (q_0, BZ), \quad \delta(q_0, \mathsf{b}, A) = (q_0, BA), \quad \delta(q_0, \mathsf{b}, B) = (q_0, BB),$$
$$\delta(q_0, \mathsf{c}, A) = (q_1, A), \quad \delta(q_0, \mathsf{c}, B) = (q_1, B),$$
$$\delta(q_1, \mathsf{a}, A) = (q_1, \epsilon), \quad \delta(q_1, \mathsf{b}, B) = (q_1, \epsilon), \quad \delta(q_1, \epsilon, Z) = (q_2, \epsilon).$$

動作例

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{abaacaaba}, Z) &\vdash (q_0, \mathsf{baacaaba}, AZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aacaaba}, BAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{acaaba}, ABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{caaba}, AABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{aaba}, AABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{aba}, ABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{ba}, BAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{a}, AZ) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, Z) \\
&\vdash (q_2, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

動作失敗例

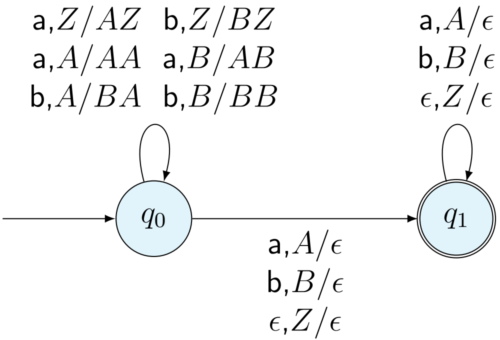
$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{abaaaaba}, Z) &\vdash (q_0, \mathsf{baaaaba}, AZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aaaaba}, BAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aaaba}, ABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aaba}, AABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aba}, AAABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{ba}, AAAABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{a}, BAAAABAZ) \\
&\vdash (q_0, \epsilon, ABAAAABAZ)
\end{aligned}
$$

非決定性プッシュダウンオートマトン
Non-deterministic PDA

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle \tag{4.1}$$

- Q: 内部状態の集合
- Σ: テープのアルファベット
- Γ: スタックのアルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$: 遷移関数
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $Z_0 \in \Gamma$: スタックの底の記号
- $F \subseteq Q$: 終状態の集合

例 4.1:


a,Z/AZ b,Z/BZ
a,A/AA a,B/AB
b,A/BA b,B/BB
a,A/ϵ
b,B/ϵ
ϵ,Z/ϵ
q_0
q_1
a,A/ϵ
b,B/ϵ
ϵ,Z/ϵ

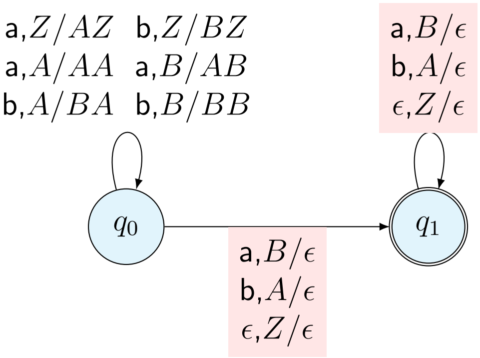
$$Q = \{q_0, q_1\}, \qquad F = \{q_1\},$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \qquad \Gamma = \{A, B, Z\}.$$

$$\delta(q_0, \mathsf{a}, Z) = \{(q_0, AZ)\} \qquad \delta(q_0, \mathsf{a}, A) = \{(q_0, AA), (q_0, \epsilon)\}$$
$$\delta(q_0, \mathsf{a}, B) = \{(q_0, AB)\} \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, Z) = \{(q_0, BZ)\}$$
$$\delta(q_0, \mathsf{b}, A) = \{(q_0, BA)\} \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, B) = \{(q_0, BB), (q_0, \epsilon)\}$$
$$\delta(q_0, , Z) = \{(q_0, \epsilon)\} \qquad \delta(q_1, \mathsf{a}, A) = \{(q_1, \epsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \mathsf{b}, B) = \{(q_1, \epsilon)\} \qquad \delta(q_1, , Z) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

動作 (受理した例)

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{abaaaaba}, Z) &\vdash (q_0, \mathsf{baaaaba}, AZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aaaaba}, BAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aaaba}, ABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aaba}, AABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{aba}, ABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{ba}, BAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{a}, AZ) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, Z) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

例 4.2:


a, Z/AZ b, Z/BZ
a, A/AA a, B/AB
b, A/BA b, B/BB
a, B/ϵ
b, A/ϵ
ϵ, Z/ϵ
q_0
q_1
a, B/ϵ
b, A/ϵ
ϵ, Z/ϵ

$$Q = \{q_0, q_1\}, \qquad F = \{q_1\},$$
$$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \qquad \Gamma = \{A, B, Z\}.$$

$$\delta(q_0, \mathsf{a}, Z) = \{(q_0, AZ)\} \qquad \delta(q_0, \mathsf{a}, A) = \{(q_0, AA)\}$$
$$\delta(q_0, \mathsf{a}, B) = \{(q_0, AB), (q_0, \epsilon)\} \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, Z) = \{(q_0, BZ)\}$$
$$\delta(q_0, \mathsf{b}, A) = \{(q_0, BA), (q_0, \epsilon)\} \qquad \delta(q_0, \mathsf{b}, B) = \{(q_0, BB)\}$$
$$\delta(q_0, , Z) = \{(q_0, \epsilon)\} \qquad \delta(q_1, \mathsf{a}, B) = \{(q_1, \epsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \mathsf{b}, A) = \{(q_1, \epsilon)\} \qquad \delta(q_1, , Z) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

動作 (受理した例)

$$
\begin{aligned}
(q_0, \mathsf{abaabbab}, Z) &\vdash (q_0, \mathsf{baabbab}, AZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{aabbab}, BAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{abbab}, ABAZ) \\
&\vdash (q_0, \mathsf{bbab}, AABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{bab}, ABAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{ab}, BAZ) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{b}, AZ) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, Z) \\
&\vdash (q_1, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

- 最初の例では、$\{ww^R | w \in (\mathsf{a}+\mathsf{b})^*\}$ を受理。折り返しの文字 c は不要
- 二番目の例では、w^R において a と b を入れ替えた文字列を受理

PDA の受理言語

- PDA の受理言語は、正規表現では表せないもの
  - 前半と後半の文字数が同じ、前後を反転などは正規表現では表せない
- スタックを使うことで、前半の文字列を覚えることができる
  - 長さに制限なし
- 再帰関数の実装にはスタックが必要

回文 (palindrome) 受理する Python コード

```
def palindrome(input:str)->bool:
    if len(input) <= 1:
        return True
    if input[0] != input[-1]:
        return False
    return palindrome(input[1:-1])
```